XXVI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PROBLEMA 1

Cada um dos números $x_1, x_2, \ldots, x_{2004}$ pode ser igual a $\sqrt{2}-1$ ou a $\sqrt{2}+1$. Quantos valores inteiros distintos a soma $\sum_{k=1}^{2004} x_{2k-1}x_{2k} = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \ldots + x_{2003}x_{2004}$ pode assumir?

PROBLEMA 2

Seja *ABCD* um trapézio retângulo de bases *AB* e *CD*, com ângulos retos em *A* e *D*. Dado que a diagonal menor *BD* é perpendicular ao lado *BC*, determine o menor valor possível para a razão $\frac{CD}{AD}$.

PROBLEMA 3

Os doze alunos de uma turma de olimpíada saíam para jogar futebol todos os dias após a aula de matemática, formando dois times de 6 jogadores cada e jogando entre si. A cada dia eles formavam dois times diferentes dos times formados em dias anteriores. Ao final do ano, eles verificaram que cada 5 alunos haviam jogado juntos num mesmo time exatamente uma vez. Quantos times diferentes foram formados ao longo do ano?

PROBLEMA 4

Determine todas as soluções da equação $n \cdot 2^{n-1} + 1 = m^2$, com *n* e *m* naturais.

PROBLEMA 5

Dizemos que um número inteiro positivo é sinistro quando a soma de seus fatores primos é igual à soma dos expoentes de sua decomposição em fatores primos. Encontre todos os números sinistros de quatro algarismos.

PROBLEMA 6

Sejam *H*, *I* e *O* o ortocentro, o incentro e o circuncentro do triângulo *ABC*, respectivamente. A reta *CI* corta o circuncírculo de *ABC* no ponto *L*, distinto de *C*. Sabe-se que *AB* = *IL* e *AH* = *OH*. Determine os ângulos do triângulo *ABC*.