

**XXVI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA**  
**Segunda Fase – Nível 2 (7ª. ou 8ª. séries)**

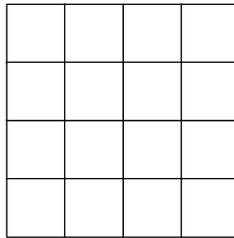
**PARTE A**  
**(Cada problema vale 4 pontos)**

01. Na multiplicação a seguir,  $a$ ,  $b$  e  $c$  são algarismos:

$$\begin{array}{r}
 1\ a\ b \\
 \times\ b\ 3 \\
 \hline
 * * * \\
 * * * \\
 \hline
 1\ c\ c\ 0\ 1
 \end{array}$$

Calcule  $a + b + c$ .

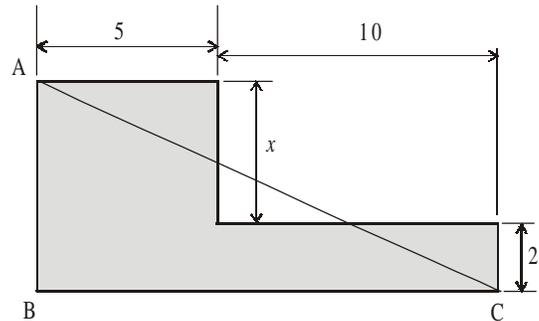
02. De quantos modos podemos sombrear quatro casas do tabuleiro  $4 \times 4$  abaixo de modo que em cada linha e em cada coluna exista uma única casa sombreada?



03. Qual é a soma dos algarismos do número  $\sqrt{2004 \times 2002 \times 1998 \times 1996 + 36}$ ?

04. No desenho ao lado, o triângulo  $ABC$  é retângulo e os lados do polígono (região escura) são paralelos ou coincidem com algum dos catetos do triângulo.

Calcule  $x$  de modo que a área do polígono seja igual à do triângulo.



05. Um polígono com 20 lados é chamado *icoságono*. Unindo-se três dos vértices de um icoságono regular obtemos triângulos. Quantos são triângulos retângulos?

XXVI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA  
Segunda Fase – Nível 2 (7ª. ou 8ª. séries)

PARTE B  
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

- (a) É possível dividir o conjunto  $\{1^2, 2^2, \dots, 7^2\}$  em dois grupos  $A$  e  $B$  de modo que a soma dos elementos de  $A$  seja igual à soma dos elementos de  $B$ ? Justifique.
- (b) É possível dividir o conjunto  $\{1^2, 2^2, 3^2, \dots, 9^2\}$  em dois grupos  $C$  e  $D$  de modo que a soma dos elementos de  $C$  seja igual à soma dos elementos de  $D$ ? Justifique.

PROBLEMA 2

- (a) Simplifique a expressão

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$$

- (b) Certa calculadora tem duas teclas especiais:  $A$  e  $B$ . A tecla  $A$  transforma o número  $x$  que está no visor em  $\frac{1}{x}$ . A tecla  $B$  transforma o número  $x$  que está no visor em  $1 - x$ .

Pedro tem um número no visor e aperta sucessivamente, de forma alternada, as duas teclas:

$A, B, A, B, \dots$

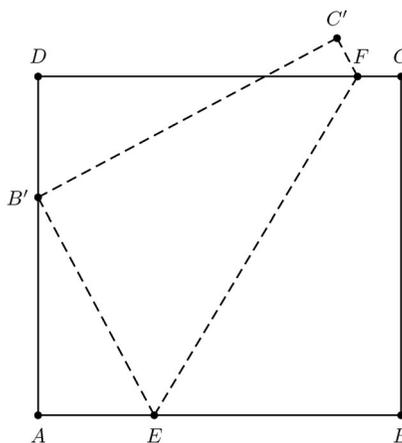
Após 1000 operações, o visor mostrava o número 2004. Que número Pedro tinha inicialmente no visor?

PROBLEMA 3

Uma folha de papel retangular  $ABCD$  foi dobrada de modo que o vértice  $B$  foi levado no ponto  $B'$  sobre o lado  $AD$ . A dobra é  $EF$ , com  $E$  sobre  $AB$  e  $F$  sobre  $CD$ .

Sabe-se que  $AE = 8$ ,  $BE = 17$  e  $CF = 3$ .

- (a) Calcule a medida do segmento  $AB'$ .
- (b) Calcule a medida do lado  $AD$ .



PROBLEMA 4

Um número de 4 algarismos  $abcd$  é chamado de *legal* quando a soma dos números formados pelos dois primeiros e pelos dois últimos algarismos é igual ao número formado pelos algarismos centrais (ou seja,  $ab + cd = bc$ ). Por exemplo, 2307 é um número legal pois  $23 + 07 = 30$ .

- (a) Qual é o menor número legal maior do que 2307?
- (b) Quantos são os números legais de 4 algarismos?