XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 3

Solução do Problema 1:

Os possíveis produtos $x_{2k-1}x_{2k}$ são $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)=3-2\sqrt{2}$, $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)=3+2\sqrt{2}$ e $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$. Suponha que a produtos são iguais a $3-2\sqrt{2}, b$ produtos são iguais a $3+2\sqrt{2}$ e $1002-a-b$ produtos são iguais a 1.

A soma é igual a $a(3-2\sqrt{2})+b(3+2\sqrt{2})+1002-a-b=1002+2a+2b+2(b-a)\sqrt{2}$.

Assim, para que a soma seja inteira, devemos ter $a = b$. Logo a soma é igual a $1002+4a$.

Como a varia de 0 a 501 (pois $a + b$ não pode ser maior que 1002), a soma pode assumir 502 valores inteiros.

Critério de correção:

i) Observar que os produtos $x_{2k-1}\cdot x_{2k}$ só podem ter as formas $3-2\sqrt{2}$, $3+2\sqrt{2}$ e 1: **[3 pontos]**

ii) • Baseado na irracionalidade de $\sqrt{2}$, mostrar que os totais de produtos da forma $3-2\sqrt{2}$ e da forma $3+2\sqrt{2}$ devem ser iguais: **[+ 3 pontos]**

• Caso apenas afirme que tais quantidades devem ser iguais, sem justificar: **[+ 1 ponto]**

iii) • Concluir que a soma pode assumir 502 valores inteiros, justificando que tais valores são distintos (através da expressão que fornece o valor do somatório, por exemplo): **[+ 4 pontos]**

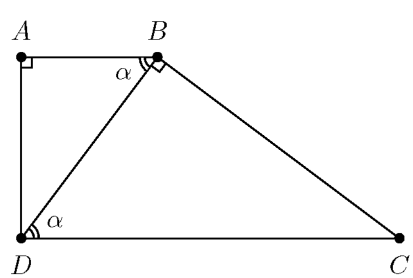
• Caso apenas afirme que são 502 valores distintos: **[+ 2 pontos]**

Observações:

O enunciado continha um erro: o somatório deveria ser $\sum_{k=1}^{1002} x_{2k-1}x_{2k}$. E não $\sum_{k=1}^{2004} x_{2k-1}x_{2k}$.

Os alunos que encontraram corretamente a resposta para o número de valores inteiros distintos que a soma $\sum_{k=1}^{2004} x_{2k-1}x_{2k} = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + ... + x_{4007}x_{4008}$ assumir, a qual é 1003 (de fato, agora, na notação da solução acima, a soma é $2004 + 4^a$, e a varia de 0 a 1002) também devem ganhar 10 pontos.

Solução do Problema 2:

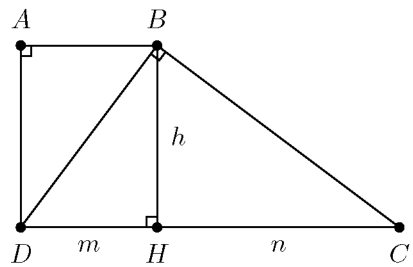


Seja $A\hat{B}D = BDC = \alpha.$ Então $DC = \dfrac{BD}{\cos\alpha}$ e $AD = BD \text{ sen } \alpha$, donde

$$\frac{DC}{AD} = \frac{\frac{BD}{\cos\alpha}}{BD \text{ sen } \alpha} = \frac{1}{\text{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{\text{sen}2\alpha} \geq 2.$$

A igualdade ocorre quando $\text{sen } 2\alpha = 1,$ ou seja, quando $\alpha = 45°.$

Segunda Solução do Problema 2:



Sejam H a projeção de B sobre DC, $DH = m$, $HC = n$ e $BH = h$. $ABDH$ é então um retângulo, donde $AD = BH = h$.

Como o triângulo CBD é retângulo, temos $h^2 = mn.$ Logo,

$$\frac{DC}{AD} = \frac{DC}{BH} = \frac{m+n}{h} = \frac{m+n}{\sqrt{mn}}.$$

Mas sabemos que $(\sqrt{m} - \sqrt{n})^2 \geq 0,$ donde $m + n \geq 2\sqrt{mn}.$ A igualdade ocorre quando $m = n$.
Segue que

$$\frac{DC}{AD} = \frac{m+n}{\sqrt{mn}} \geq 2.$$

Critério de Correção:

Chegar a $\dfrac{DC}{AD} = \dfrac{1}{\text{sen}\alpha\cos\alpha}$ ou $\dfrac{DC}{AD} = \dfrac{m+n}{\sqrt{mn}}$ **[+5 pontos]**

Provar que $\dfrac{DC}{AD} \geq 2$ **[+5 pontos]**

Afirmar sem provar que $\dfrac{DC}{AD} \geq 2$ **[+1 ponto]**

Solução do Problema 3:

Para cada grupo de 5 alunos, existe um único time formado que os contém. Logo, contamos $\binom{12}{5} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5!} = 792$ times para cada 5 alunos escolhidos. Por outro lado, em cada time de 6 jogadores, temos $\binom{6}{5} = 6$ modos de escolhermos cinco jogadores, ou seja, existem 6 grupos de

5 jogadores que geram o mesmo time na nossa primeira contagem. Logo, o total de times formados é igual a $\frac{792}{6} = 132$.

Segunda Solução do Problema 3:

Há $\binom{12}{6}$ maneiras de escolher 6 dentre 12 alunos. Além disso, fixados 5 alunos, há 7 maneiras de montar um time com esses 5 alunos mais outro aluno. Assim, considerando que cada 5 alunos jogaram juntos num mesmo time exatamente uma vez, o total de maneiras de escolher 6 dentre 12 alunos é igual a 7 vezes o número de maneiras de formar os times ao longo do ano. Logo o número de maneiras de formar os times ao longo do ano é $\frac{1}{7}\binom{12}{6} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 132$.

Critério de correção:

i) Encontrar que há:

(A) $\binom{12}{5}$ maneiras de escolher 5 alunos dentre 12 alunos

ou

(B) $\binom{12}{6}$ maneiras de escolher 6 alunos dentre 12: **[3 pontos]**

(alunos que fizerem ambos também recebem 3 pontos)

ii) Mostrar que para cada time há 6 maneiras de escolher 5 alunos (e que, portanto, o número de maneiras de dividir os times é igual ao total da contagem (A) dividido por 6)

ou

Mostrar que, fixados 5 alunos, há 7 maneiras de montar um time com esses 5 alunos mais outro (e que, portanto, o número de maneiras de dividir os times é igual ao total da contagem (B) dividido por 7): **[+ 5 pontos]**

iii) Concluir, obtendo o total de maneiras de dividir os times, que é 132: **[+ 2 pontos]**

Observação: o estudante não precisa provar que existe uma maneira de dividir os times 132 vezes de modo que cada 5 alunos haviam jogado juntos.

As pontuações a seguir não se acumulam com as demais.

- Qualquer tentativa frustrada de escrever as divisões de times explicitamente: **[0 ponto]**
- Qualquer tentativa frustrada de contagem direta, utilizando o princípio fundamental da contagem e/ou dividindo em casos e/ou utilizando probabilidades: **no máximo [2 pontos]**
- Escreveu ou encontrou uma maneira de descrever <u>*todas as divisões*</u> de times explicitamente ou algo equivalente dividindo em casos e/ou utilizando probabilidades, <u>*obtendo o resultado correto*</u>: **[10 pontos]**

Solução do Problema 4:
A equação é equivalente a $n\cdot 2^{n-1}=(m-1)(m+1).$ Suponha *n* > 3. Temos *m* ímpar, digamos *m* = 2*k* +1. A equação fica então $n\cdot 2^{n-3}=k(k+1).$ Portanto, 2^{n-3} divide *k* ou *k* + 1, pois *k* ou *k* + 1 (o que for ímpar) divide *n*. Assim, $k+1\geq 2^{n-3}$ e $k\leq n,$ donde $n+1\geq 2^{n-3}$.

Mostremos, por indução, que $n+1<2^{n-3}$ para *n* > 5. Para *n* = 6 (base de indução), temos 6 + 1 = 7 e 2^{6-3} = 8. Supondo que a desigualdade é válida para *n* = *k*, provemos que a mesma é válida para *n* = *k* + 1 (passo indutivo). De fato, temos $k+1<2^{k-3}\Leftrightarrow 2(k+1)<2^{k-2}$. Como $k+2<2(k+1)$, temos $k+2<2^{k-2}$, completando a demonstração.

Assim, basta testar $0\leq n\leq 5$. Portanto as soluções são (*m*; *n*) = (1;0) e (*m*; *n*) = (9;5).

Critério de correção:
i) Escrever a equação na forma $n\cdot 2^{n-1}=(m-1)(m+1)$: **[2 pontos]**
ii) Concluir que *m* é ímpar e chegar à equação na forma $n\cdot 2^{n-3}=k(k+1)$ ou $n\cdot 2^{n-3}=k(k-1)$ (no caso em que se faz *m* = 2*k* – 1) ou, ainda, $n\cdot 2^{n-3}=\left(\frac{m-1}{2}\right)\left(\frac{m+1}{2}\right)$: **[+ 2 pontos]**
iii) Mostrar que $n+1\geq 2^{n-3}$ ou obter (e demonstrar!) alguma desigualdade da forma $f(n)\geq g(n)$, sendo *f*(*n*) uma função polinomial e *g*(*n*) uma função com exponenciais; em seguida, provar, com o auxílio do princípio da indução finita, que $n+1<2^{n-3}$ para $n>5$ (ou que $f(n)<g(n)$ para *n* maior a algum número menor que 10): **[+ 5 pontos]**
iv) Testar os casos $0\leq n\leq 5$: **[+ 1 ponto]**

Observação: o aluno que ***só*** **não escrever a solução (*m*; *n*) = (1; 0)** deve receber pontuação completa.

Os seguintes critérios não se acumulam com os anteriores:
- Só encontrar a solução (*m*; *n*) = (1; 0): **[0 ponto]**
- Só encontrar a solução (*m*; *n*) = (9; 5): **[1 ponto]**

Só encontrar as soluções (*m*; *n*) = (9; 5) e (*m*; *n*) = (1; 0) **[2 pontos]**

Solução do Problema 5:
Seja $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$, (com $p_1<p_2<\dots<p_k$ primos) um número sinistro. Como $p_i\geq 2$ para todo *i*, $n\geq 2^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k}$. **[2 pontos]**
Como *n* tem 4 algarismos, $n<10000,$ donde $2^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k}\leq n<10000$, e logo $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k\leq 13.$ **[+1 ponto]**
Se um dos fatores primos fosse maior ou igual a 11, a soma dos fatores primos seria ≥ 11, donde $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k\geq 11$ e $n\geq 2^{10}\cdot 11>10000$, absurdo. **[+1 ponto]**
Assim, os únicos fatores primos possíveis são 2, 3, 5 e 7. Como $3^5<1000,$ se a soma dos expoentes for $\leq 5,$ o número deve ser $5^5=3125$. A soma pode ser também igual a 7, donde o número pode ser $2^4\cdot 5^3=2000,$ ou $2^3\cdot 5^4=5000$ (note que $7^7>10000$).
Não pode ser igual a $8=3+5$, pois $3^7\cdot 5>10000.$

Pode ser igual a 9 = 7 + 2, podendo o número ser igual a $2^8 \cdot 7 = 1792$ ou $2^7 \cdot 7^2 = 6272$.
Pode ser igual a 10 = 2 + 3 + 5, podendo o número ser igual a $2^8 \cdot 3 \cdot 5 = 3840$, $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 = 5760$, $2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 = 9600$ ou $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 = 8640$ (note que os fatores primos não podem ser 3 e 7, pois $3^9 \cdot 7 > 10000$).
A soma não pode ser 11, nem 12 (pois $2^{10} \cdot 3 \cdot 7$ e $5^{11} \cdot 7$ são maiores que 10000) nem 13. Assim os números sinistros de quatro algarismos são $5^5 = 3125$, $2^4 \cdot 5^3 = 2000$, $2^3 \cdot 5^4 = 5000$, $2^8 \cdot 7 = 1792$, $2^7 \cdot 7^2 = 6272$, $2^8 \cdot 3 \cdot 5 = 3840$, $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 = 5760$, $2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 = 9600$ e $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 = 8640$.
[+6 pontos]

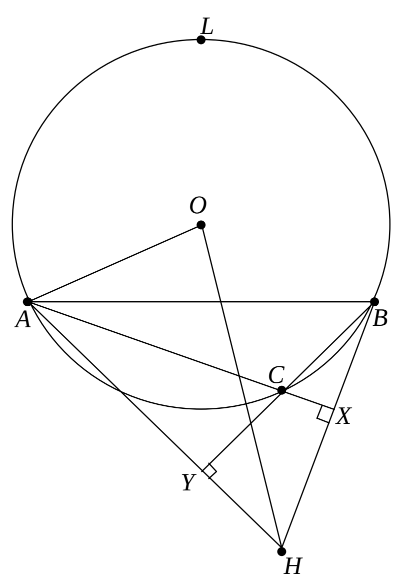
Observação: Soluções que não encontram todos os números sinistros de quatro algarismos ou que encontram um falso número sinistro ganham no máximo 8 pontos.
Deve ser retirado pelo menos um ponto por cada número sinistro que falte.

Solução do Problema 6:

Sendo α, β e γ as medidas dos ângulos internos nos vértices *A*, *B* e *C*, respectivamente, temos $m(\angle IBL) = m(\angle BIL) = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Logo $BL = IL$, e como $BL = AL$ e $IL = AB$, concluímos que o triângulo *ABL* é equilátero, logo o arco *AB* mede 60º e, portanto, $m(\angle ACB) = 120^\circ$. **[3 pontos]**

O quadrilátero *CXHY* é inscritível, onde *X* e *Y* são os pés das alturas traçadas de *A* e *B*. Logo $\angle AHB$ mede $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Como $m(\angle AOB) = 120^\circ$, concluímos que o quadrilátero *OAHB* é inscritível. (Isto também pode ser provado, por exemplo, utilizando-se a propriedade de que o simétrico de *H* em relação a *AB* pertence ao circuncírculo de *ABC*). **[3 pontos]**

Isto implica que $m(\angle AHO) = m(\angle ABO) = 30^\circ$, e como $OH = AH$, temos $m(\angle AOH) = m(\angle OAH) = 75^\circ$. **[+2 pontos]**
Finalmente, temos $m(\angle BAC) = m(\angle OAH) - m(\angle OAB) - m(\angle XAH) = 75^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 15^\circ$; e $m(\angle ABC) = 180^\circ - 120^\circ - 15^\circ = 45^\circ$. **[+2 pontos]**



Complemento do Critério de Correção:

Resposta correta sem justificativa: **3 pontos.**

Tentativas por Geometria Analítica ou Trigonometria que não cheguem à resposta correta**: no máximo 6 pontos.**