XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **4 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 20. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	010	024	048	006	180

01. Ver Problema 6 – Parte A do Nível 1

02. Ver Problema 8 – Parte A do Nível 1

03.

$$\sqrt{2004\times2002\times1998\times1996+36}=\sqrt{(2000+4)\times(2000+2)\times(2000-2)\times(2000-4)+36}=$$

$$\sqrt{(2000+4)\times(2000-4)\times(2000+2)\times(2000-2)+36}=\sqrt{(2000^2-4^2)\times(2000^2-2^2)+36}=$$

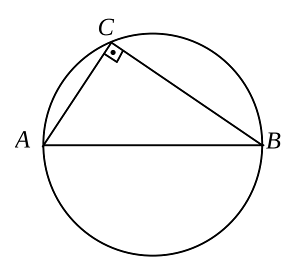
$$\sqrt{2000^2\times2000^2-2^2\times2000^2-4^2\times2000^2+4^2\times2^2+36}=$$

$$\sqrt{2000^4-20\times2000^2+100}=\sqrt{(2000^2-10)^2}=\left|2000^2-10\right|=3999990$$

Portanto a soma dos algarismos é $3+9+9+9+9+9+0=48$.

04. Ver Problema 1 – Parte B do Nível 1

05. O icoságono regular é inscritível em uma circunferência. Sejam *A* e *B* dois vértices diametralmente opostos do icoságono. Qualquer ponto *C* da circunferência, distinto de *A* e de *B*, unido com *A* e *B* formará um triângulo retângulo, conforme a figura.



Para todo diâmetro cujas extremidades são dois vértices do icoságono há 18 vértices que não são extremidades do referido diâmetro, possibilitando a formação de 18 triângulos retângulos. Como há $\frac{20}{2}=10$ diâmetros distintos cujas extremidades são dois vértices do icoságono, há $18\times10=180$ triângulos retângulos.

Soluções Nível 2 - Parte B

Solução do Problema 1: Ver Problema 3 – Parte B do Nível 1

Solução do Problema 2:

a) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{x}}}=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}=1-\dfrac{1}{\dfrac{x-1-x}{x-1}}=1-\dfrac{x-1}{-1}=1+x-1=x$

Critério de correção:

Acertou **[4 pontos]**

Chegou até a expressão $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}$ **[2 pontos]**

b) $x\xrightarrow{A}\dfrac{1}{x}\xrightarrow{B}1-\dfrac{1}{x}\xrightarrow{A}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}\xrightarrow{B}1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}\xrightarrow{A}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}\xrightarrow{B}1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$

Como $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=x$, vemos que após apertar 6 vezes sucessivamente, de forma alternada, as duas teclas A e B, o número que aparece no visor da calculadora volta a ser igual ao que aparecia inicialmente no visor. Uma vez que $1000=166\times 6+4$, basta analisar apenas as 4 primeiras interações, ou seja,

$$x\xrightarrow{A}\frac{1}{x}\xrightarrow{B}1-\frac{1}{x}\xrightarrow{A}\frac{1}{1-\dfrac{1}{x}}\xrightarrow{B}1-\frac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=2004,$$

de onde temos que

$$1-\frac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=2004\Leftrightarrow 1-\frac{1}{\dfrac{x-1}{x}}=2004\Leftrightarrow 1-\frac{x}{x-1}=2004\Leftrightarrow 1-\frac{x}{x-1}=2004\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-1-x}{x-1}=2004\Leftrightarrow\frac{-1}{x-1}=2004\Leftrightarrow 2004x-2004=-1\Leftrightarrow x=\frac{2003}{2004}$$

Critério de correção:

Perceber que ao apertar a seqüência de teclas ABABAB o resultado é o igual ao número inicial **[1 ponto]**

Provar que ao apertar a seqüência de teclas ABABAB o resultado é o igual ao número inicial **[+2 pontos]**

Descobrir que, como $1000=166\times 6+4$, então 2004 foi obtido após apertar as teclas 4 vezes e chegar a equação $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=2004$ **[+1 ponto]**

Resolver a equação $1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=2004$ **[+2 pontos]**

A seguinte pontuação não se acumula com as demais:

Simplesmente obter e resolver a equação $1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=2004$ **[2 pontos]**

Solução do Problema 3:

a) A partir da dobra da folha podemos ver que $B'E$ = BE = 17, e como AE = 8, aplicando o teorema de Pitágoras temos $AB'=\sqrt{B'E^2-AE^2}=\sqrt{17^2-8^2}=15$.

Critério de correção:

Perceber que $B'E = BE$ **[3 pontos]**

Aplicar o teorema de Pitágoras e obter $AB'=15$ **[+1 ponto]**

b) Temos que $AB=AE+BE=8+17=25=CD$ e $DF=CD-CF=25-3=22$. Seja G a intersecção de $B'C'$ e CD.

Como FC' = FC e $\Delta AB'E \sim \Delta DGB' \sim \Delta C'GF$, $\frac{FG}{B'E}=\frac{FC'}{AE} \Leftrightarrow \frac{FG}{17}=\frac{3}{8} \Leftrightarrow FG=\frac{51}{8}$. Logo $DG=CD-CF-FG=25-3-\frac{51}{8}=\frac{125}{8}$.

Temos também que $\frac{DB'}{AE}=\frac{DG}{AB'} \Leftrightarrow \frac{DB'}{8}=\frac{\frac{125}{8}}{15} \Leftrightarrow DB'=\frac{25}{3}$.

Finalmente $AD=AB'+DB'=15+\frac{25}{3}=\frac{70}{3}$

Critério de correção:

Perceber que $DF=CD-CF=22$ **[1 ponto]**

Observar que $\Delta AB'E \sim \Delta DGB' \sim \Delta C'GF$ **[+2 pontos]**

Calcular FG **[+1 ponto]**

Calcular DB' **[+1 ponto]**

Calcular AD **[+1 ponto]**

Solução do Problema 4: Como ab + cd = $bc \Leftrightarrow 10a+b+10c+d=10b+c \Leftrightarrow 10a+d=9(b-c)$, ou seja, $10a+d$ é o número de dois algarismo $a\,d$, e é um múltiplo de 9.

a) Mantendo a = 2, temos d = 7. Além disso, $10\cdot 2+7=9(b-c) \Leftrightarrow b-c=3$. O menor valor de b que podemos escolher, após 3, é 4, e nesse caso, c = 1. O número procurado é, então, 2417.

Critério de correção:

Perceber que $10a+d$ é um múltiplo de 9 **[3 pontos]**

Perceber que pode-se manter a = 2 e concluir que o número procurado é 2417 **[+2 pontos]**

A seguinte pontuação não se acumula com as demais:
Apenas apresentar 2417 e verificar que 24 + 17 = 41 **[1 ponto]**

b) Uma vez que escolhemos $b-c$, a e d estão determinados: a é o algarismo das dezenas de $9(b-c)$, e d, o das unidades. Além disso, $9(b-c)\geq 10 \Leftrightarrow b-c\geq 2$.

Se $b-c=2$, $(b,c)\in\{(2,0);(3,1);(4,2);...;(9,0)\}$, um total de 8 possibilidades. Da mesma forma, vemos que se $b-c=3$, $(b,c)\in\{(3,0);(4,1);(5,2);...;(9,6)\}$, há um total de 7 possibilidades. Para $b-c=4$, $(b,c)\in\{(4,0);(5,1);(6,2);...;(9,5)\}$, 6 possibilidades, $b-c=5$, $(b,c)\in\{(5,0);(6,1);(7,2);...;(9,4)\}$, 5 possibilidades, $b-c=6$, $(b,c)\in\{(6,0);(7,1);(8,2);(9,3)\}$, 4 possibilidades, $b-c=7$, $(b,c)\in\{(7,0);(8,1);(9,2)\}$, 3 possibilidades, $b-c=8$, $(b,c)\in\{(8,0);(9,1)\}$, 2 possibilidades e, finalmente, para $b-c=9$, $(b,c)=(9,0)$, 1 possibilidade.

Há, portanto, um total de $8+7+6+5+4+3+2+1=36$ números *legais*.

Critério de correção:
Perceber que $b-c\geq 2$ **[2 pontos]**
Apresentar uma maneira de organizar e contar os 36 casos **[+3 pontos]**
Caso esqueça, no máximo, 9 casos, **[+2 pontos]**

A seguinte pontuação não se acumula com as demais:
Apenas apresentar, pelo menos, 18 números *legais* **[2 pontos]**