XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **3 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 30. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**
Resposta	064	036	032	360	098	010	076	024	262	600

01. O quociente da divisão de 102 por 3 é 34, de 1002 por 3 é 334, de 10002 por 3 é 3334, etc. Assim, o quociente da divisão de 10...02, com vinte algarismos zero, por 3, é igual a 33...34, com vinte algarismos três. Logo a soma dos algarismos do quociente é $20 \times 3 + 4 = 64$.

02. $a + b = 34$ e $a + c = 33$ logo $b - c = 1$. Como b e c são primos, concluímos que $b = 3$ e $c = 2$. Dessa forma $a = 34 - b = 34 - 3 = 31$, de onde vem $a + b + c = 31 + 2 + 3 = 36$.

03. área retângulo $ABCD = 4 \cdot$ área retângulo $AFEG$ e

área retângulo $AFEG = 4 \cdot$ área retângulo $AIHJ$, logo

área retângulo $ABCD = 16 \cdot$ área retângulo $AIHJ$. Mas

área retângulo $AIHJ = 2 \cdot$ área triângulo AHI. Portanto

$$\text{área retângulo } ABCD = 32 \cdot \text{área triângulo } AHI \Leftrightarrow \frac{\text{área retângulo } ABCD}{\text{área triângulo } AHI} = 32$$

04. São teimosos apenas os números que terminam em 0,1, 5 e 6. A quantidade de números teimosos de 3 algarismos é 9.10.4 = 360 (na casa das centenas podemos escrever qualquer algarismo de 1 a 9, na casa das dezenas podemos escrever qualquer algarismo de 0 a 9 e na casa das unidades podemos escrever um dos quatro algarismos acima).

05. A soma dos divisores é ímpar quando o número de divisores ímpares é ímpar. Isto acontece quando, por exemplo, o número tem somente um divisor primo ímpar de expoente par, na sua decomposição. Tomando os números menores do que 100, temos $99 = 3^2 \cdot 11$ que tem 6 divisores todos ímpares, cuja soma é par mas $98 = 2 \cdot 7^2$ tem 6 divisores (1, 7, 49, 2, 14, 98), três pares e três ímpares, portanto de soma ímpar.

06. b multiplicado por 3 dá um número terminado em 1, logo b = 7. Como $7 \times 3 = 21$, concluímos que a multiplicado por 3, mais 2, ao somar com 9, deve resultar um número terminado em 0, ou seja, $3a + 2 + 9 = \underline{\ }0$, ou seja a = 3. Desta forma temos a =3, b = 7 e c = 0, de onde vem $a + b + c = 10$.

$$\begin{array}{r} 137 \\ \times \quad 73 \\ \hline 411 \\ 959 \\ \hline 10001 \end{array}$$

07. De 1 a 100, existem 25 múltiplos de 4; logo, 75 cartões não contêm múltiplos de 4. No pior caso possível, Esmeralda tiraria todos esses cartões antes de sair algum cartão com múltiplo de 4. Assim, para ter certeza de que o número tirado seja múltiplo de 4, Esmeralda deve retirar todos eles e mais um, ou seja, 76 cartões.

08. Podemos começar pintando uma casa da primeira linha, depois uma da segunda linha, em seguida uma da terceira e, finalmente, uma da quarta. O número de possibilidades para primeira linha é 4, para a segunda é 3 (pois uma das casas não pode ser pintada, já que a coluna com esta casa só pode ter essa casa pintada), para a terceira é 2 e para a quarta é 1. O número total de maneiras pelas quais podemos pintar o tabuleiro é 4.3.2.1 = 24.

09. Da frente para o fundo, a primeira, a terceira e a quinta camadas verticais têm 18 cubos brancos e 17 cubos cinzas, a segunda e a quarta camadas têm 17 brancos e 18 cinzas. Logo o número total de cubos brancos é $3\cdot 18+2\cdot 17=88$ e o número total de cubos cinzas é $3\cdot 17+2\cdot 18=87$. Portanto, a massa total do bloco, em gramas, é $1\cdot 88+2\cdot 87=262$.

10. Inicialmente existiam 980 aves com a cauda verde e 20 das demais. Após a epidemia, estas 20 aves correspondem a 5%, donde o total de aves agora é 20 × 20 = 400 (sendo 380 da cauda verde). Portanto, morreram 600 aves.

Soluções Nível 1 – Parte B

Solução do Problema 1:

O polígono consiste na reunião de dois retângulos: um deles tem largura 10 e altura 2 e o outro tem largura 5 e altura $x+2$; o triângulo tem catetos de medidas 15 e $x+2$. Como a área do polígono é igual à área do triângulo, temos

$$10\cdot 2+5(x+2)=\frac{15(x+2)}{2}\Leftrightarrow 40+10x+20=15x+30\Leftrightarrow 5x=30\Leftrightarrow x=6$$

Critérios de Pontuação

- Calcula a área do polígono como $20 + 5(x + 2)$ ou $5x + 30$ **[4 pontos]**
- Calcula a área do triângulo como $15(x + 2)/2$ **[3 pontos]**
- Resolve a equação e conclui que $x = 6$ **[3 pontos]**

Solução do Problema 2:

a) Cada linha apresenta 1 nas colunas cujos números são múltiplos do número da linha. Assim, a linha 5 tem 1 nas colunas 5, 10, 15, etc. Até 100, existem 20 múltiplos de 5, logo a soma dos números na linha 5 é igual a 20.

b) Cada coluna apresenta 1 no cruzamento com as linhas cujos números são divisores do número da coluna. Assim, a soma dos números da coluna 60 é igual ao número de divisores de 60. Como $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, concluímos que 60 tem 3.2.2 = 12 divisores. Logo, a soma dos números da coluna 60 é 12.

Critérios de Pontuação

(a)

- Exibe completamente e corretamente a linha 5, ou observa que apresenta 1 nas colunas cuja ordem é um múltiplo de 5 e conclui que a soma dos números da linha 5 é 20 **[4 pontos]**

(b)

- Exibe completamente e corretamente a coluna 60, ou observa que apresenta 1 nas linhas cuja ordem é um divisor de 60 e conclui que a soma dos números da coluna 60 é 12 **[6 pontos]**

Pontuações Parciais

(a)

- Tenta exibir a linha 5, mas comete erros e dá como resposta um número entre 15 ou 18 ou entre 22 e 25 **[1 ponto]**
- Tenta exibir a linha 5, mas comete erros e dá como resposta um número entre 18 e 22 **[2 pontos]**

(b)

- Tenta exibir a coluna 60, mas comete erros e dá como resposta um número menor entre 9 , 10, 14 ou 15 **[1 ponto]**
- Tenta exibir a coluna 60, mas comete erros e dá como resposta um 11 ou 13 **[2 pontos]**

Solução do Problema 3:

a) A soma total dos elementos é

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 = 140 .$$

Logo, cada um dos grupos deve conter elementos que somem 70. Examinando as parcelas, vemos que 49 + 1 + 4 +16 = 70. Assim podemos escrever, por exemplo, $A = \{1^2, 2^2, 4^2, 7^2\}$ e $B = \{3^2, 5^2, 6^2\}$.

b) Como

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 = 140 + 64 + 81 = 285$$

é ímpar, é impossível dividir em dois grupos de mesma soma.

Critérios de Pontuação

(a)

- Exibe os conjuntos $\{1^2, 2^2, 4^2, 7^2\}$ e $\{3^2, 5^2, 6^2\}$ **[4 pontos]**

(b)

- Calcula a soma de todos os elementos (285) e observa explicitamente que não pode dividir em dois grupos de mesma soma porque 285 é impar **[6 pontos]**

Pontuações Parciais

(a)

- Calcula a soma de todos os elementos (140), observa que a soma dos elementos de cada conjunto deve ser igual a 70, mas não exibe os conjuntos **[1 ponto]**

(b)

- Tenta dividir os elementos em dois grupos de mesma soma, conclui que é impossível fazer a divisão por análise de alguns casos **[0 ponto]**
- Diz que é impossível fazer a divisão **[0 ponto]**