XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – OPM 2003
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PROBLEMA 1

No triângulo *ABC*, *M* é o ponto médio do lado *AC*, *D* é um ponto sobre o lado *BC* tal que *AD* é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ e *P* é o ponto de interseção de *AD* e *BM*. Sabendo que a área de *ABC* é 100, *AB* = 10 e *AC* = 30, calcule a área do triângulo *APB*.

PROBLEMA 2

Dizemos que um número *N* de quatro algarismos é biquadrado quando é igual à soma dos quadrados de dois números: um é formado pelos dois primeiros algarismos de *N*, na ordem em que aparecem em *N* e o outro, pelos dois últimos algarismos de *N*, também na ordem em que aparecem em *N*.

Por exemplo, 1233 é biquadrado pois $1233 = 12^2 + 33^2$. Encontre um outro número biquadrado.

Observação: Lembre-se de que um número de quatro algarismos não pode começar com zero.

PROBLEMA 3

Entre 15 números reais distintos, o menor deles igual a 1, não há três que podem ser lados de um triângulo. Quais valores o maior dos 15 números pode assumir?

PROBLEMA 4

O triângulo *ABC* é retângulo em *A*. Dentre os pontos *P* pertencentes ao perímetro do triângulo, encontre aquele que minimiza a soma *AP* + *BP* + *CP*.

PROBLEMA 5

Um quadrado de lado 3 é dividido em 9 quadrados de lado unitário, formando um quadriculado. Cada quadrado unitário é pintado de azul ou vermelho. Cada cor tem probabilidade $\frac{1}{2}$ de ser escolhida e a cor de cada quadrado é escolhida independentemente das demais. Qual a probabilidade de obtermos, após colorirmos todos os quadrados unitários, um quadrado de lado 2 pintado inteiramente de uma mesma cor?

PROBLEMA 6

Calcule a soma

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1} = \frac{2^1}{3^1+1} + \frac{2^2}{3^2+1} + \frac{2^3}{3^4+1} + \frac{2^4}{3^8+1} + \cdots + \frac{2^{n+1}}{3^{2^n}+1}$$