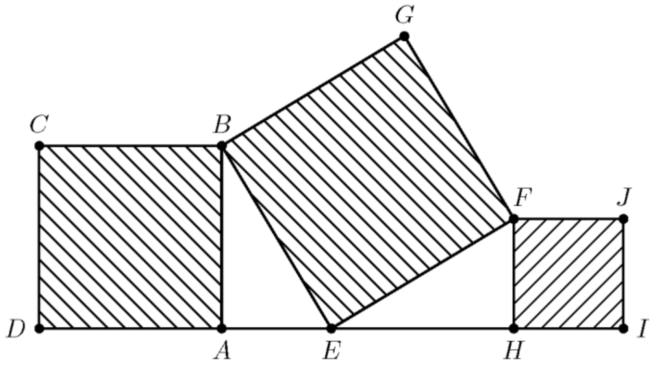
## XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA OPM 2003
## Segunda Fase – Nível 2 (7ª. ou 8ª. séries)

**PROBLEMA 1**

No desenho ao lado, o quadrado *ABCD* tem área de 30 cm$^2$ e o quadrado *FHIJ* tem área de 20 cm$^2$. Os vértices *A*, *D*, *E*, *H* e *I* dos três quadrados pertencem a uma mesma reta. Calcule a área do quadrado *BEFG*.



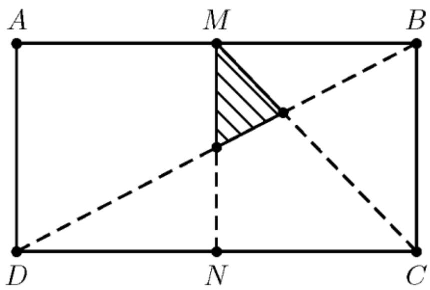

**PROBLEMA 2**

Dados os números inteiros de 1 a 26, escolha 13 dentre eles de forma que:

1) O número 4 está entre os números escolhidos.
2) Nenhum número escolhido é divisor de outro número escolhido.

**PROBLEMA 3**

Uma folha retangular *ABCD* de área 1000 cm$^2$ foi dobrada ao meio e em seguida desdobrada (segmento *MN*); foi dobrada e desdobrada novamente (segmento *MC*) e finalmente, dobrada e desdobrada segundo a diagonal *BD*. Calcule a área do pedaço de papel limitado pelos três vincos (região escura no desenho).




**PROBLEMA 4**

Considere o produto de todos os divisores positivos de um número inteiro positivo, diferentes desse número. Dizemos que o número é *poderoso* se o produto desses divisores for igual ao quadrado do número. Por exemplo, o número 12 é poderoso, pois seus divisores positivos menores do que ele são 1, 2, 3, 4 e 6 e $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6 = 144 = 12^2$. Apresente todos os números poderosos menores do que 100.

**PROBLEMA 5**

Seja $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, uma função tal que $f(x)\,f(y) - f(xy) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$, quaisquer que sejam os reais não nulos $x$ e $y$.

(a) Calcule $f(1)$

(b) Encontre uma fórmula para $f(x)$

**PROBLEMA 6**

Dizemos que um número *N* de quatro algarismos é biquadrado quando é igual à soma dos quadrados de dois números: um é formado pelos dois primeiros algarismos de *N*, na ordem em que aparecem em *N* e o outro, pelos dois últimos algarismos de *N*, também na ordem em que aparecem em *N*.

Por exemplo, 1233 é biquadrado pois 1233 = $12^2 + 33^2$. Encontre um outro número biquadrado.

**Observação:** Lembre-se de que um número de quatro algarismos não pode começar com zero