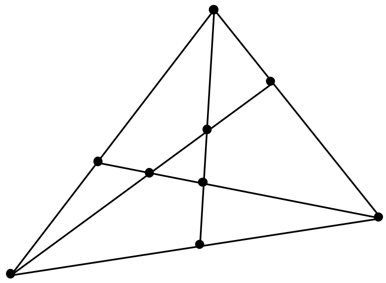
XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – OPM 2003
Segunda Fase – Nível 1 (5ª. ou 6ª. séries)

PARTE A
(Cada problema vale 3 pontos)

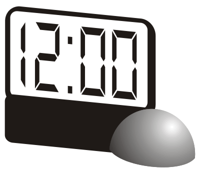
01.
Quantas vezes aparece o algarismo 9 no resultado da operação $10^{100} - 2003$?

02.
Quantos números inteiros maiores do que 2003^2 e menores do que 2004^2 são múltiplos de 100?

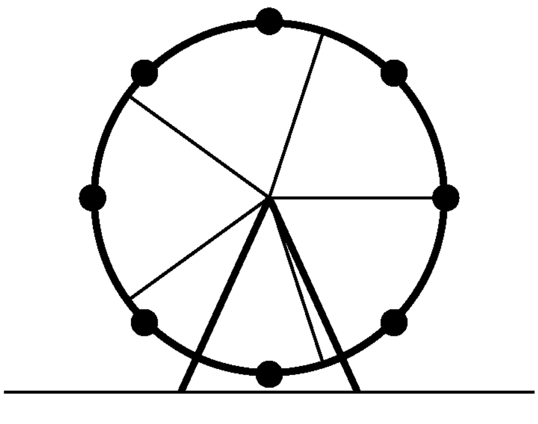
03.
Quantos triângulos existem cujos lados estão sobre alguns dos segmentos traçados na figura ao lado?



04.
Um estudante, com muito tempo livre e muita curiosidade, resolveu fazer o seguinte: a cada minuto, ao mudar o horário em seu relógio digital, marcava em seu caderno um *X* para cada algarismo **7** que aparecia no visor. Assim, se seu relógio mostrava **02:07** ele marcava *X* e quando seu relógio mostrou **07:17** ele marcou *XX*. Começou a fazer isso quando seu relógio mostrava **01:00** e parou quase doze horas depois, quando o relógio mostrava **12:59**.
Calcule a metade da quantidade de *X* que ele marcou em seu caderno.

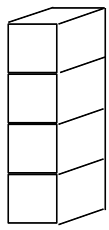


05.
A grande atração do OBM Parque é uma roda gigante (a figura mostra uma roda gigante similar, porém com um número menor de cabines). As cabines são numeradas com 1, 2, 3,…, no sentido horário. Quando a cabine 25 está na posição mais baixa da roda-gigante, a de número 8 está na posição mais alta. Quantas cabines tem a roda-gigante?



06.
Anos bissextos são múltiplos de 4, exceto aqueles que são múltiplos de 100 mas não de 400. Quantos anos bissextos houve desde a Proclamação da República, em 1889, até hoje?

07.
Em um dado comum a soma dos pontos sobre faces opostas é sempre 7. Beatriz construiu uma torre com 4 dados comuns iguais, colando as faces como mostrado na figura. Qual é o menor número de pontos que Beatriz pode obter somando todos os pontos das dezoito faces da superfície da torre?



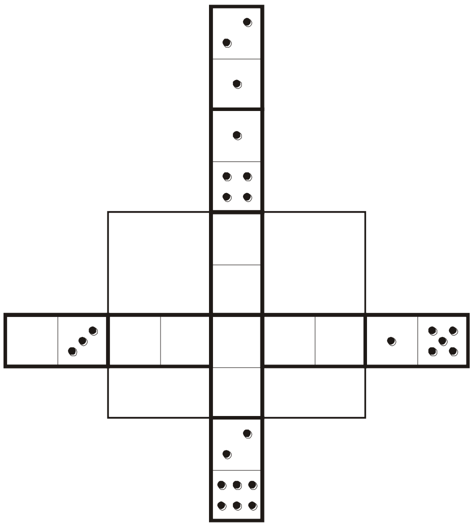
08.
Na multiplicação a seguir *a*, *b*, *c* e *d* são algarismos.

$$\begin{array}{r} 45 \\ a3 \;\times \\ \hline 3bcd \end{array}$$

Calcule $b + c + d$.

09.
A média de cinco inteiros positivos diferentes é 11. Determine o maior valor possível para o maior dos cinco inteiros.

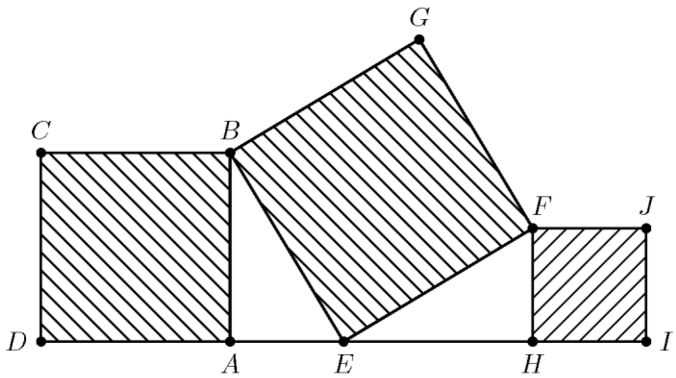
10.
Nove peças diferentes de dominó estão sobre uma mesa, parcialmente cobertos por um pedaço de papel. Os dominós se tocam de modo que 1 ponto é vizinho a 1 ponto, 2 pontos são vizinhos a 2 pontos, etc. Qual o total de pontos escondidos pelo papel?



PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1
Quais números inteiros positivos menores que 120 podem ser escritos como soma de duas ou mais potências distintas de base 3 e exponente positivo? Por exemplo, $12 = 3^2 + 3^1$ é um número deste tipo mas $18 = 3^2 + 3^2$ não é.

PROBLEMA 2
No desenho ao lado, o quadrado *ABCD* tem área de 64 cm^2 e o quadrado *FHIJ* tem área de 36 cm^2. Os vértices *A*, *D*, *E*, *H* e *I* dos três quadrados pertencem a uma mesma reta. Calcule a área do quadrado *BEFG*.



PROBLEMA 3
Considere o produto de todos os divisores positivos de um número inteiro positivo, diferentes desse número. Dizemos que o número é *poderoso* se o produto desses divisores for igual ao quadrado do número. Por exemplo, o número 12 é poderoso, pois seus divisores positivos menores do que ele são 1, 2, 3, 4 e 6 e $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 144 = 12^2$. Apresente todos os números poderosos menores do que 100.