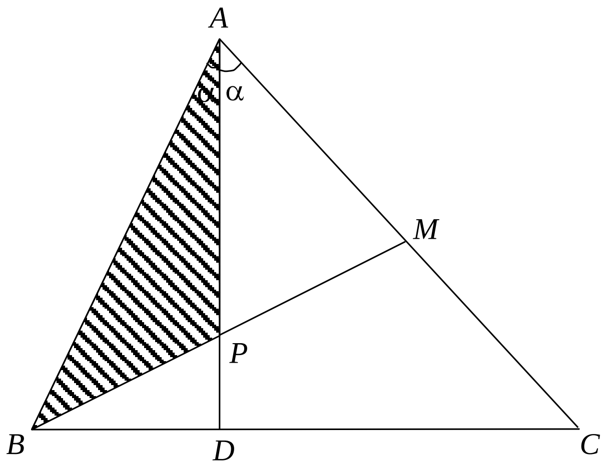
XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – OPM 2003

Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

Soluções Nível 3 – Primeira Fase

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:



As alturas que passam por B dos triângulos ABC e ABM são iguais a distância d de B à reta AC,

logo $\dfrac{\text{área } ABM}{\text{área } ABC} = \dfrac{\frac{AM \cdot d}{2}}{\frac{AC \cdot d}{2}} = \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \text{área } ABM = \dfrac{1}{2}\text{área } ABC = \dfrac{1}{2} \cdot 100 = 50.$

Analogamente, $\dfrac{\text{área } ABP}{\text{área } ABM} = \dfrac{BP}{BM}.$ Pelo Teorema das bissetrizes,

$$\frac{BP}{PM} = \frac{AB}{AM} = \frac{10}{30} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \Rightarrow PM = \frac{3}{2}\ BP$$

Logo

$$\frac{\text{área } ABP}{\text{área } ABM} = \frac{BP}{BM} = \frac{BP}{BP+PM} = \frac{BP}{BP + \frac{3}{2}BP} = \frac{BP}{\frac{5}{2}BP} = \frac{2}{5} \Rightarrow \text{área } ABP = \frac{2}{5}\text{área } ABM = \frac{2}{5} \cdot 50 = 20.$$

SEGUNDA SOLUÇÃO:

Seja $2\alpha = \angle BAC.$ Temos

$$\frac{AB \cdot AC \cdot sen 2\alpha}{2} = \text{área } ABC \Leftrightarrow \frac{10 \cdot 30 \cdot \text{sen} 2\alpha}{2} = 100$$

$$\Leftrightarrow \text{sen} 2\alpha = \frac{2}{3}$$

Além disso,

área ABP + área PAM = área ABM

$$\Leftrightarrow \frac{AB \cdot AP \cdot \text{sen}\alpha}{2} + \frac{AP \cdot AM \cdot \text{sen}\alpha}{2} = \frac{AB \cdot AM \cdot \text{sen} 2\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow AP \cdot \text{sen}\alpha (AB + AM) = AB \cdot AM \cdot \text{sen} 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow AP \cdot \text{sen}\alpha \left(10 + \frac{30}{2}\right) = 10 \cdot \frac{30}{2} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow AP \cdot \text{sen}\alpha = 4$$

Logo área área $ABP = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20.$

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

Primeira Solução:

- Calcular a área de ABM **[4 pontos]**
- Obteve $\frac{BP}{BM} = \frac{2}{5}$ ou equivalente $\left(\frac{BP}{PM} \text{ ou } \frac{PM}{BP} \text{ ou } \frac{BM}{BP}, \text{etc} \right)$ **[3 pontos]**
- Concluiu: **[3 pontos]**

Segunda Solução:

- Calculou $\operatorname{sen} 2\alpha$ **[3 pontos]**
- Obteve $AP \cdot \operatorname{sen}\alpha$ **[5 pontos]**
- Concluiu **[2 pontos]**

Atenção: não somar as pontuações dos dois critérios!

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Veja a solução e o critério de correção do problema 6 do Nível 2.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

Sejam a, b, c reais positivos tais que $a \le b \le c$. Esses números são medidas dos lados de um triângulo se, e somente se, $c < a + b$. Ou seja, não são se, e somente se, $c \ge a + b$.

Assim, sendo $1 = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \ldots < x_{15}$ os números dados, devemos ter:

$$\left| \begin{array}{l} x_3 \ge x_2 + x_1 \\ x_4 \ge x_3 + x_2 \\ \quad \vdots \\ x_{15} \ge x_{14} + x_{13} \end{array} \right.$$

De fato, esse sistema de desigualdade equivale a não haver três que podem ser lado de um triângulo. Observe que se, $i < j < k$, $x_k < x_j + x_i$, então $x_k < x_{k-1} + x_{k-2}$.

Considere a seqüência de Fibonacci ($F_0 = 0, F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \ge 0$),

$x_3 \ge x_2 + x_1$;

$x_4 \ge x_3 + x_2 \ge x_2 + x_1 + x_2 = 2x_2 + x_1$;

$x_5 \ge x_4 + x_3 \ge 2x_2 + x_1 + x_2 + x_1 = 3x_2 + 2x_1$;

$x_6 \ge x_5 + x_4 \ge 3x_2 + 2x_1 + 2x_2 + x_1 = 5x_2 + 3x_1$;

parece que $x_n \ge F_{n-1}x_2 + F_{n-2}x_1$ e, com efeito,

$$x_{k+2} \ge x_{k+1} + x_k \ge F_k \cdot x_2 + F_{k-1} \cdot x_1 + F_{k-1} \cdot x_2 + F_{k-2} \cdot x_1 = F_{k+1} \cdot x_2 + F_k \cdot x_1$$

Portanto, sendo $x_2 = 1 + \xi, \xi > 0$,

$x_{15} \geq F_{14} \cdot x_2 + F_{13} \cdot x_1 = 377 \cdot (1+\xi) + 233 \cdot 1 = 610 + 377\xi.$

Como podemos tornar ξ tão pequeno quanto queiramos, o maior dos 15 números pode assumir qualquer valor real maior do que 610.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

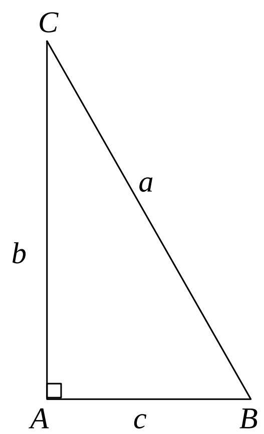
- Escrever que as medidas $a < b < c$ não podem ser lados de um triângulo se, e somente se, $c \geq a + b$. **2 pontos.**
- Escrever o sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} x_3 \geq x_2 + x_1 \\ x_4 \geq x_3 + x_2 \\ \quad\vdots \\ x_{15} \geq x_{14} + x_{13} \end{cases}$$

1 ponto.

- Observar que esse sistema equivale às condições dadas no problema, ou seja, não é necessário considerar outras desigualdades. **2 pontos.**
- A partir de $x_n \geq F_{n-1} \cdot x_2 + F_{n-2} \cdot x_1$ ou $x_n > F_n$ ou estimando os termos até x_{15}, provar que $x_{15} > 610$. **3 pontos.**
- Verificar que, realmente, para todo $x_{15} > 610$ é possível construir tal seqüência de números. **2 pontos.**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:



Sejam *a*, *b*, *c* as medidas dos segmentos *BC*, *AC* e *AB*, respectivamente.

Consideraremos separadamente os casos em que *P* está em *AC*, em *AB* e em *BC*.

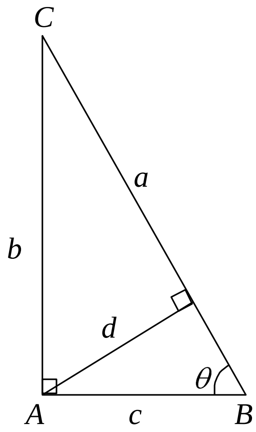
Se *P* está em *AC*, então *AP* + *CP* = *b*. Então, minimizar *AP* + *BP* + *CP* reduz-se a minimizar *BP*. Isso ocorre quando *P* coincide com *A*, pois a menor distância entre um ponto e uma reta é determinada pelo pé da perpendicular traçada a partir desse ponto.

Nesse caso o valor mínimo de *AP* + *BP* + *CP* é *b* + *c*.

O caso em que *P* está em *AB* é inteiramente análogo.

Suponha, agora, que *P* está em *BC*. Etão *BP* + *CP* = *a*, ou seja, minimizar *AP* + *BP* + *CP* reduz-se a minimizar *AP*.

Isso ocorre quando *AP* é perpendicular a *BC*.
Essa medida está representada por *d* no diagrama ao lado. Nesse caso, o mínimo de *AP* + *BP* + *CP* é *a* + *d*.
Assim, para completar a resolução da questão, basta comparar *a* + *d* e *b* + *c*.
Temos, então, várias maneiras de concluir a resolução.
Uma maneira:



Observe que $\dfrac{b\cdot c}{2}=\dfrac{a\cdot d}{2}\Leftrightarrow bc=ad$ e $a^2=b^2+c^2$.

Logo

$$(a+d)^2=a^2+2ad+d^2=b^2+c^2+2bc+d^2=(b+c)^2+d^2$$

e, como $d^2>0,(a+d)^2>(b+c)^2\Leftrightarrow a+d>b+c.$

Outra maneira: $d=c\cdot \operatorname{sen}\theta;\ b=a\cdot \operatorname{sen}\theta.$

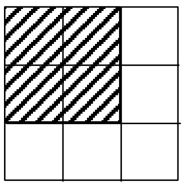
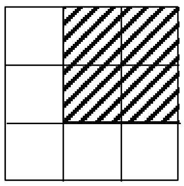
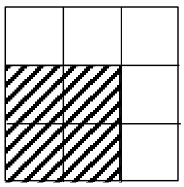
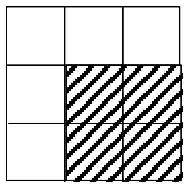
Logo $(a+d)-(b+c)=a+c\cdot\operatorname{sen}\theta-a\cdot\operatorname{sen}\theta-c=(a-c)(1-\operatorname{sen}\theta)>0$, isto é, *a* + *d* > *b* + *c*.
Resposta: O ponto que minimiza *AP* + *BP* + *CP* é *P* = *A* (nesse caso *AP* + *BP* + *CP* = *b* + *c*).

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

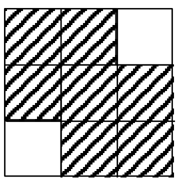
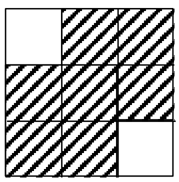
- Provar que se *P* está sobre *AC* ou *AB*, então devemos ter *P* = *A*. **[2 pontos]**
- Provar que se *P* está sobre *BC*, então *P* deve ser a projeção de *A* sobre *BC* **[2 pontos]**
- Demonstrar que *a* + *d* > *b* + *c*. **[Até 6 pontos]**

Obs.: Caso o estudante considere pelo menos um dos seguintes fatos:
$c=ad; d=c\cdot\operatorname{sen}\theta; b=a\cdot\operatorname{sen}\theta,$ ele deve receber pelo menos 2 pontos.

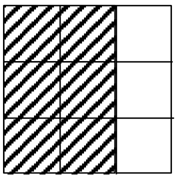
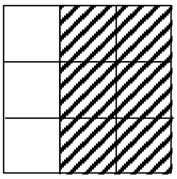
SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:
O quadrado de lado 2 pode ser

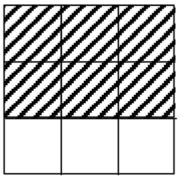
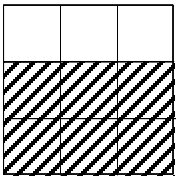
 ou  ou  ou 

A probabilidade de cada um desses quadrados de lado 2 ser inteiramente de uma mesma cor é $2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$. Observe que todos os quatro quadrados unitários devem ser da mesma cor azul ou vermelho. Os demais quadradinhos podem ser de qualquer cor.
Algumas configurações são consideradas pelo menos 2 vezes:

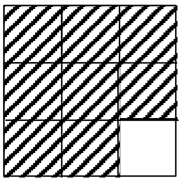
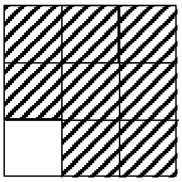
 ou 

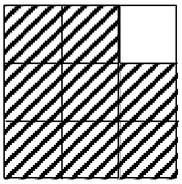
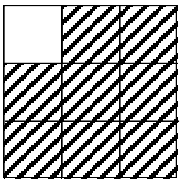
Probabilidade $2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^7$

 ou  ou Probabilidade $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$

 ou 

Algumas configurações são consideradas pelo menos 3 vezes:

 ou  ou Probabilidade $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8$

 ou 

E as configurações com todos azuis ou todos vermelhos são contadas 4 vezes (probabilidade: $\left(\frac{1}{2}\right)^9$).

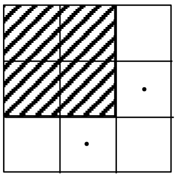
Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, a probabilidade pedida é:

$$4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 - 4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{190}{512} = \frac{95}{256}.$$

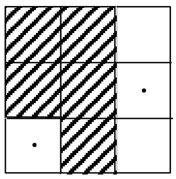
Outras soluções podem envolver a seguinte divisão em casos: representando as cores possíveis por  e , deixando em branco os quadradinhos em que as duas cores são permitidas.

Assim os casos favoráveis são:

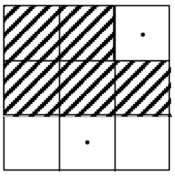
1) Com um único quadrado de lado 2 monocromático.



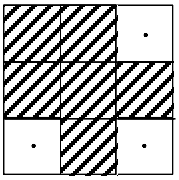
$2 \cdot$ ( = azul e  = vermelho ou vice-versa) $\cdot\, 2^3$ (3 brancos) $\cdot\, 4$ (giro do tabuleiro) $= 64$



$2 \cdot 2^2 \cdot 4 = 32$



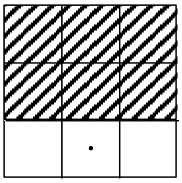
$2 \cdot 2^2 \cdot 4 = 32$



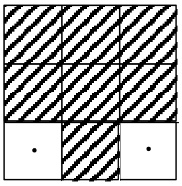
$2 \cdot 4 = 8$

$64 + 32 + 32 + 8 = 136$ ao todo

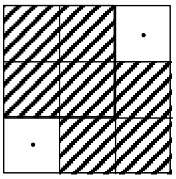
2) Com exatamente dois quadrados de lado 2 monocromáticos.



$2 \cdot 2^2 \cdot 4 = 32$



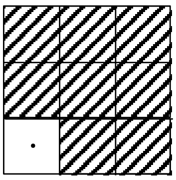
$2 \cdot 4 = 8$



$2 \cdot 2 = 4$ só dois giros

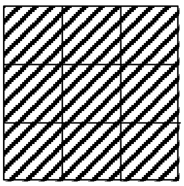
$2 + 8 + 4 = 44$ ao todo

3) Com exatamente três quadrados de lado 2 monocromáticos.



$2 \cdot 4 = 8$

4) Com exatamente quatro quadrados de lado 2 monocromáticos.

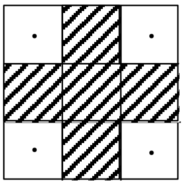


2

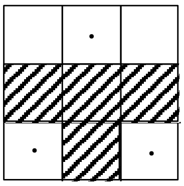
O total de casos favoráveis é, portanto,
$136 + 44 + 8 + 2 = 190$

e a probabilidade é $\frac{190}{2^9} = \frac{95}{256}$.

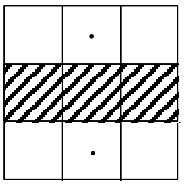
Contando os casos não favoráveis:



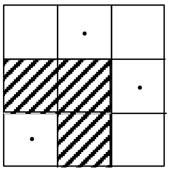
2



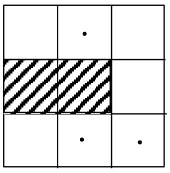
$2 \cdot 2^2 \cdot 4 = 32$



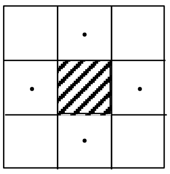
$2 \cdot 2^4 \cdot 2 = 64$



$2 \cdot 2^3 \cdot 4 = 64$



$2 \cdot 2^4 \cdot 4 = 128$



$2 \cdot 2^4 = 32$

O total de casos não fatoráveis é, portanto, $2 + 32 + 64 + 64 + 128 + 32 = 322$

E a probabilidade pedida é $1 - \frac{322}{2^9} = \frac{95}{256}$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

Solução via inclusão-exclusão (ou alguma idéia equivalente)

- Considerar configurações que tem pelo menos um quadrado **[2 pontos]**
- Subtrair aquelas que têm pelo menos 2 quadrados e, portanto, foram contadas pelo menos duas vezes. **[3 pontos]**
- Somar aqueles que têm pelo menos 3 quadrados e, portanto, foram contadas pelo menos 3 vezes. **[3 pontos]**
- Concluir **[2 pontos]**

Solução via obtenção direta dos casos favoráveis.
Atenção: caso o estudante tente essa abordagem e não chegue a resposta correta, sua nota não deve ultrapassar 6 pontos.

- Mostrar que existem 136 configurações com exatamente um quadrado monocromático. **[4 pontos]**
- Mostrar que existem 44 configurações com exatamente 2 quadrados monocromáticos. **[2 pontos]**
- Contar as configurações com exatamente 3 e com exatamente 4 quadrados monocromáticos. **[0 (zero) pontos]**
- Concluir **[4 pontos]**

Solução via obtenção direta dos casos não favoráveis.
Atenção: caso o estudante tente essa abordagem e não chegue a resposta correta, sua nota não deve ultrapassar 6 pontos.

- Dividir um subcasos, levando em conta que os únicos quadrados monocromáticos possíveis têm a mesma cor da casa central. **[3 pontos]**
- Obter entre 200 e 250 configurações (sem repetições!) **[1 ponto]**
- Obter menos de 200 configurações **[0 (zero) pontos]**
- Obter pelo menos 250 configurações (sem repetições!) **[3 pontos]**

Atenção: nos três últimos critérios, os pontos não se acumulam.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6:
Analisando casos pequenos:

$$\frac{2^1}{3^1+1}=\frac{2}{4}=1-\frac{2}{4}=1-\frac{2^1}{3^1+1}$$

$$\frac{2^1}{3^1+1}+\frac{2^2}{3^2+1}=\frac{36}{40}=1-\frac{4}{40}=1-\frac{2^2}{(3^1+1)\cdot(3^2+1)}$$

$$\frac{2^1}{3^1+1}+\frac{2^2}{3^2+1}+\frac{2^3}{3^4+1}=\frac{3272}{3280}=1-\frac{8}{3280}=1-\frac{2^3}{(3^1+1)\cdot(3^2+1)\cdot(3^4+1)}$$

(Observe que não compensaria simplificar as frações. Isso é comum quando queremos descobrir um padrão.)
Parece então, que podemos conjecturar que

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}=1-\frac{2^{n+1}}{(3^1+1)\cdot(3^2+1)(3^4+1)\ldots(3^{2^n}+1)}$$

Simplificando um pouco essa expressão antes de tentar demonstrá-la.

$$(3^1+1)(3^2+1)(3^4+1)\ldots(3^{2^n}+1)=\frac{(3^1-1)(3^1+1)(3^2+1)(3^4+1)\ldots(3^{2^n}+1)}{3^1-1}=$$

$$\frac{(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)\ldots(3^{2^n}+1)}{2}=\frac{(3^4-1)(3^4+1)\ldots(3^{2^n}+1)}{2}=\ldots=\frac{3^{2^{n+1}}-1}{2}.$$

Ou seja, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{3^{2k}+1}=1-\frac{2^{n+1}}{\frac{3^{2^{n+1}}-1}{2}}=1-\frac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}}-1}$

Podemos agora demonstrar nossa conjuectura pelo uso direto do Princípio da Indução Finita ou considerando que, se descobrirmos $f(k)$ tal que

$$\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}=f(k+1)-f(k),$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}=\sum_{k=0}^{n}[f(k+1)-f(k)=$$

$$f(1)-f(0)+f(2)-f(1)+...+f(n+1)-f(n)=f(n+1)-f(0)$$

(f é a "integral discreta" de $\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}$.)

Levando em conta novamente nossa conjectura, podemos inferir que

$f(k)=-\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}-1}$ e, de fato,

$$f(k+1)-f(k)=-\frac{2^{k+2}}{3^{2^{k+1}}-1}+\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}-1}=\frac{-2^{k+2}+2^{k+1}(3^{2^k}+1)}{(3^{2^k}+1)(3^{2^k}-1)}=\frac{2^{k+1}(3^{2^k}+1-2)}{(3^{2^k}+1)(3^{2^k}-1)}=\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}$$

Portanto

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}=f(n+1)-f(0)=\frac{-2^{n+2}}{3^{2^{n+1}}-1}-\left(\frac{-2^1}{3^{2^0}-1}\right)\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}=1-\frac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}}-1}.$$

Outra maneira de concluir a resolução:

Como escrevemos anteriormente, uma vez conjecturada a expressão correta, podemos demonstrá-la pelo P.I.F.

Base de indução: Para $n = 0$.

$$\sum_{k=0}^{0}\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}=\frac{2^1}{3^{2^0}+1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};$$

$$1-\frac{2^2}{3^{2^1}-1}=1-\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Passo indutivo: Supondo que

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}=1-\frac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}}-1}.$$

Temos $\sum_{k=0}^{n+1}\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}=1-\frac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}}-1}+\frac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}}+1}=1-2^{n+2}\cdot\frac{(3^{2^{n+1}}+1)-(3^{2^{n+1}}-1)}{(3^{2^{n+1}}-1)\cdot(3^{2^{n+1}}+1)}=1-\frac{2^{n+3}}{3^{2^{n+2}}-1}.$

Isso completa a nossa demonstração.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Conjecturar que $\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}=1-\frac{2^{n+1}}{(3^1+1)(3^2+1)(3^4+1)...(3^{2^n}+1)}$. **[3 pontos]**
- Conjecturar que $\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}=1-\frac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}}-1}$. **[6 pontos]**

Atenção: nos dois critérios acima, os pontos não se acumulam.

- Concluir, ou seja, demonstrar que $\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}=1-\frac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}}-1}$. **[4 pontos]**
- Tentativas que não levam a alguma conjectura correta **[0 (zero) pontos]**