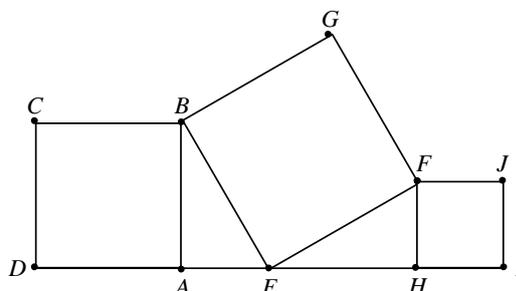


XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA OPM 2003
Segunda Fase – Nível 2 (7ª. ou 8ª. séries)

Soluções Nível 2 – Segunda Fase

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Os triângulos ABE e EHF são retângulos em A e H , respectivamente; a medida do ângulo \widehat{BEF} é de 90° ; se a medida do ângulo \widehat{HEF} é x , então a medida dos ângulos \widehat{EFH} e \widehat{AEB} é $90^\circ - x$ e, conseqüentemente, a medida do ângulo \widehat{ABE} é x ; como $BE = EF$ (são lados do mesmo quadrado), então os triângulos mencionados são congruentes (pelo caso ALA de congruência de triângulos).



Utilizando o teorema de Pitágoras, podemos escrever $BE^2 = AB^2 + AE^2$, o que mostra que a área do quadrado $BEFG$ é a soma das áreas dos quadrados $ABCD$ e $FHIJ$, ou seja, $30 + 20 = 50\text{cm}^2$.

SEGUNDA SOLUÇÃO:

Os triângulos ABE e EHF são retângulos em A e H , respectivamente; a medida do ângulo \widehat{BEF} é de 90° ; se a medida do ângulo \widehat{HEF} é x , então a medida dos ângulos \widehat{EFH} e \widehat{AEB} é $90^\circ - x$ e, conseqüentemente, a medida do ângulo \widehat{ABE} é x ; como $BE = EF$ (são lados do mesmo quadrado), então os triângulos mencionados são congruentes (pelo caso ALA de congruência de triângulos). Como o quadrado $ABCD$ tem área igual a 30cm^2 , concluímos que seus lados medem $\sqrt{30}\text{cm}$; o quadrado $FHIJ$ tem área igual a 20cm^2 , logo seus lados medem $\sqrt{20}\text{cm}$. Temos então, $BA = EH = \sqrt{30}\text{cm}$ e $FH = AE = \sqrt{20}\text{cm}$. Utilizando o teorema de Pitágoras, podemos escrever $BE^2 = AB^2 + AE^2$, ou seja, a área do quadrado $BEFG$ é 50cm^2 .

TERCEIRA SOLUÇÃO:

(sem usar o teorema de Pitágoras): Os triângulos ABE e EHF são retângulos em A e H , respectivamente; a medida do ângulo \widehat{BEF} é de 90° ; se a medida do ângulo \widehat{HEF} é x , então a medida dos ângulos \widehat{EFH} e \widehat{AEB} é $90^\circ - x$ e, conseqüentemente, a medida do ângulo \widehat{ABE} é x ; como $BE = EF$ (são lados do mesmo quadrado), então os triângulos mencionados são congruentes (pelo caso ALA de congruência de triângulos). Como o quadrado $ABCD$ tem área igual a 30cm^2 , concluímos que seus lados medem $\sqrt{30}\text{cm}$; o quadrado $FHIJ$ tem área igual a 20cm^2 , logo seus lados medem $\sqrt{20}\text{cm}$. Temos então, $BA = EH = \sqrt{30}\text{cm}$ e $FH = AE = \sqrt{20}\text{cm}$. A área do trapézio $ABFH$ é igual a $\frac{(AB+FH)}{2} \cdot AH = \frac{\sqrt{30} + \sqrt{20}}{2} \cdot (\sqrt{30} + \sqrt{20}) = 25 + \sqrt{20} \cdot \sqrt{30}$. Como o trapézio é composto pelos triângulos ABE , EHF e BEF e a área dos triângulos congruentes ABE e EHF é $\frac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{30}}{2}$, concluímos que a área do triângulo BEF é $50 + \sqrt{20} \cdot \sqrt{30} - 2 \times \frac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{30}}{2} = 25\text{cm}^2$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- **Para resoluções completas:** atribuir **10 pontos** para uma solução completa equivalente às mostradas. Por solução completa se entende:

- (a) mostrar ou demonstrar a congruência dos triângulos retângulos;
 (b) usar Pitágoras para calcular a área do quadrado (direta ou indiretamente) ou usar a área do trapézio para achar a área da metade do quadrado e, em seguida, a área do quadrado.

• **Para resoluções parciais:**

- (a) calculou corretamente os lados dos quadrados: **1 ponto** para cada quadrado.
 (b) Explicou de forma convincente que ABE e EHF são congruentes (não é necessária menção explícita ao caso ALA ou LAAo de congruência): **3 pontos**.
 (c) Intuiu que a área do quadrado mede 50cm^2 (palpite ou avaliação) sem explicar corretamente mas calculou a área do quadrado corretamente: **2 pontos**.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Todo número inteiro positivo n pode ser escrito na forma $2^a \cdot b$, $a \geq 0$, $b > 0$ e b ímpar (chamamos b de parte ímpar de n). Considere dois números com a mesma parte ímpar: $n_1 = 2^{a_1} \cdot b$ e $n_2 = 2^{a_2} \cdot b$. Supondo, sem perda da generalidade, que se $a_1 < a_2$, então teremos que n_1 é divisor de n_2 .

Assim, como de 1 a 26 temos 13 partes ímpares possíveis, a saber: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23 e 25, cada um dos números deve ter uma parte ímpar diferente. Mais ainda, considerando que 1 divide todos os números inteiros, o número com parte ímpar 1 é o que deve ter maior a .

Porém $4 = 2^2 \cdot 1$ e está entre os números escolhidos, logo para os demais números escolhidos devemos ter $a = 0$ ou $a = 1$. E podemos determinar todas as escolhas possíveis:

- 3 é divisor de 9; 15 e 21. Logo $2 \cdot 3 = 6, 9, 15$ e 21 devem estar na nossa escolha.
- 5 é divisor de 15 e 25. Logo $2 \cdot 5 = 10$ e 25 devem estar na nossa escolha.
- 7 é divisor de 21. Logo $2 \cdot 7 = 14$ deve estar na nossa escolha.
- Com parte ímpar 11 podemos escolher 11 ou 22 e com parte ímpar 13, 13 ou 26. As demais escolhas são 17, 19 e 23.

Portanto as escolhas possíveis são (ordenadas segundo a parte ímpar):

4; 6; 10; 14; 9; 11 ou 22; 13 ou 26; 15; 17; 19; 21; 23; 25.

SEGUNDA SOLUÇÃO:

Se houvesse apenas a condição 2, poderíamos escolher os números 14, 15, 16, ..., 26. Porém temos de escolher o 4, o que nos impede de escolher os números 16, 20 e 24.

Olhando os números restantes que não são divisores os múltiplos de 4 (ou seja, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11), observamos que o número 10 pode ser adicionado as nossas escolhas e nenhum mais.

Ficamos, então, com 12 números: 4, 10, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 25 e 26. Devemos tirar um deles, pelo menos, para acrescentar dois.

A retirada do 18 permite que acrescentemos o 6 e o 9, completando a nossa solução: 4, 6, 9, 10, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 25 e 26 (de fato, podemos colocar 11 no lugar de 22 ou 13 no lugar do 26).

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

Primeira Solução:

- Observar que os números escolhidos devem ter partes ímpares distintas (o estudante não precisa usar essa terminologia). **[4 pontos]**
- Observar que $a = 0$ ou $a = 1$, isto é, nenhum múltiplo de 4 pode ser escolhido **[1 ponto]**
 - 6 deve ser escolhido **[1 ponto]**
 - 10 deve ser escolhido **[1 ponto]**
 - 14 deve ser escolhido **[1 ponto]**

- Conclusão [2 pontos]

Segunda Solução:

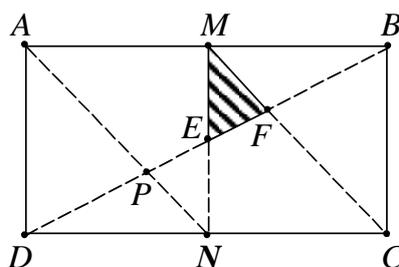
- Considerar os números maiores do que 13 que não são múltiplos de 4. [2 pontos]
- 10 pode ser escolhido [2 pontos]
- 6 e 9 podem ser escolhidos [4 pontos]
- Conclusão [2 pontos]

Caso o estudante apresente simplesmente a resposta, sem indicação de como a obteve:

- Resposta correta, ou seja, uma escolha correta de 13 números. [8 pontos]
- 12 números corretos. [4 pontos]
- 11 números corretos. [2 pontos]
- Menos de 11 números corretos. [0 pontos]

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

Vamos usar a notação $[X]$ para denotar a área do polígono X .

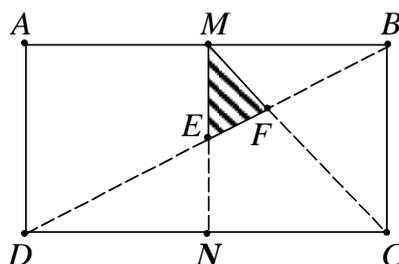


Sejam E e F os pontos de interseção como mostrados na figura. Sejam $AB = 2^a$ e $BC = 2b$. Então $AM = MB = DN = NC = a$ e $ME = EN = b$. Trace AN e seja P o ponto de interseção dos segmentos AN e BD . Os segmentos AN e MC são paralelos (pois $AM = NC$ e $AM \parallel NC$). Como M é ponto médio de AB e $MF \parallel AP$, temos que F é o ponto médio do segmento PB . Analogamente P é o ponto médio do segmento DF . Segue então que $DP = PF = FB$. Por simetria verificamos que $PE = EF$ e então $EF/FB = 1/2$. Portanto, podemos escrever:

$$\frac{[MEF]}{[MBF]} = 1/2.$$

Mas, por outro lado, $[MBE] = \frac{1}{4}[ABD] = 125$, donde $[MEF] = \frac{1}{3}125 = \frac{125}{3} \text{ cm}^2$ e

$$[MBF] = \frac{2}{3}125 = \frac{250}{3} \text{ cm}^2.$$



SEGUNDA SOLUÇÃO:

Observe que $ME \parallel BC$ e $MB \parallel DC$. Assim, temos as semelhanças de triângulo:

- $\triangle MEF \sim \triangle BCF$ (na razão de 1 : 2).
- $\triangle MBF \sim \triangle CDF$ (na razão de 1 : 2).

Lembrando que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança, temos: $[BCF] = 4[MEF]$ e $[CDF] = 4[MBF]$.

Também, $[BCD] = 500$ (metade da área do retângulo) e área do $[MCB] = 250$ (metade da área do retângulo $MNCB$, que é a metade da área do retângulo). Portanto,

$$[CFD] + [BCF] = [BCD] = 500 \Rightarrow 4[MBF] + 4[MEF] = 500 \Rightarrow [MBF] + [MEF] = 125 \quad (1)$$

e

$$[MBF] + [BCF] = [MCB] = 250 \Rightarrow [MBF] + 4[MEF] = 250. \quad (2)$$

Subtraindo (1) de (2), obtemos $3[MEF] = 125 \Rightarrow [MEF] = 125/3$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Mostra que $\frac{[MEF]}{[MBF]} = 1/2$ [6 pontos]
- Calcula $[MBE] = 125$ [2 pontos]
- Conclui corretamente $[MEF] = 125/3$ [2 pontos]

Segunda Solução:

- Mostra que $[BCF] = 4[MEF]$ [3 pontos]
- Mostra que $[CDF] = 4[MBF]$ [3 pontos]
- Conclui corretamente [4 pontos]

Outras Soluções:

- Demonstra corretamente que $[MEF] = 125/3$ [10 pontos]

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Veja a solução e o critério de correção do Problema 3 da Parte B do Nível 1.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:

(a) Fazendo $x = y = 1$, obtemos $[f(1)]^2 - f(1) = 2$, donde, resolvendo a equação, obtemos $f(1) = 2$ ou $f(1) = -1$. Este último valor não serve, pois o contra-domínio da função é o conjunto dos números reais estritamente positivos. Portanto, $f(1) = 2$.

(b) Fazendo $y = 1$ na identidade do problema obtemos $f(x)f(1) - f(x) = x + \frac{1}{x}$. Substituindo

o valor de $f(1)$, obtemos a fórmula para $f(x)$: $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Substitui $x = y = 1$ [2 pontos]
- Chega a $f(1) = 2$ ou $f(1) = -1$ [2 pontos]
- Descarta a solução $f(1) = -1$ [2 pontos]

- Substitui $y = 1$ e obtém $f(x) = x + \frac{1}{x}$

[4 pontos]

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6:

Vamos separar o número de quatro dígitos em duas partes: os dois primeiros dígitos, da esquerda para a direita, formam o número x e os dois restantes formam o número y .

Então a propriedade significa que $100x + y = x^2 + y^2$. Esta igualdade pode ser considerada uma equação do segundo grau em x : $x^2 - 100x + y^2 - y = 0$.
(3)

Resolvendo encontramos $x = 50 \pm \sqrt{2500 - (y^2 - y)}$. (4)

Com o exemplo do enunciado, $y = 33$ resulta em $x = 12$ com o sinal $(-)$ na expressão:

$$x = 50 - \sqrt{1444} = 50 - 38 = 12.$$

Naturalmente outra solução aparece quando colocamos o sinal $(+)$ na mesma expressão:

$$x_1 = 50 + \sqrt{1444} = 50 + 38 = 88.$$

Então outro número com a mesma propriedade é $8833 = 88^2 + 33^2$.

Comentários:

A equação $x^2 - 100x + y^2 - y = 0$ é equivalente a $(2x - 100)^2 + (2y - 1)^2 = 10.001$. Outra maneira de resolver o problema é então determinar todas as soluções inteiras (m, n) de $m^2 + n^2 = 10.001$, com m par e n ímpar. Se dois números podem ser escritos como soma de dois quadrados, então o produto dos mesmos também pode, pois escrevendo $p = r^2 + s^2$ e $q = t^2 + u^2$, temos

$$pq = (r^2 + s^2)(t^2 + u^2) = (rt + ts)^2 + (ru - st)^2.$$

Observando que $10.001 = 73 \times 137 = (8^2 + 3^2) \times (11^2 + 4^2)$, obtemos

$$(8^2 + 3^2) \times (11^2 + 4^2) = (8 \times 11 + 3 \times 4)^2 + (8 \times 4 - 3 \times 11)^2 = 100^2 + 1^2$$

$$(8^2 + 3^2) \times (4^2 + 11^2) = (8 \times 4 + 11 \times 3)^2 + (8 \times 11 - 3 \times 4)^2 = 65^2 + 76^2$$

é possível mostrar que todas as maneiras de escrever 10001 como soma de dois quadrados são as do tipo $(m, n) = (\pm 100, \pm 1)$ ou $(m, n) = (\pm 65, \pm 76)$ e suas permutações.

A primeira solução nos dá $2x - 100 = \pm 100$, resultado em $x = 0$ ou $x = 100$, que não servem para o problema.

A segunda solução resulta em $2y - 1 = 65$ e $2x - 100 = \pm 76$, donde obtemos $(x, y) = (88, 33)$ ou $(x, y) = (12, 33)$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Obtém outro número biquadrado (usando a equação ou de qualquer outro modo) [10 pontos]

CRITÉRIO PARA SOLUÇÕES PARCIAIS:

- Arma a equação $x^2 - 100x + y^2 - y = 0$ [1 ponto]
- Reduz explicitamente o problema a encontrar os valores de y para os quais $\sqrt{2500 - (y^2 - y)}$ é inteiro ou a encontraras soluções de $(2x - 100)^2 + (2y - 1)^2 = 10001$ [3 pontos]