

XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – OPM 2003
Segunda Fase – Nível 1 (5ª. ou 6ª. séries)

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte A

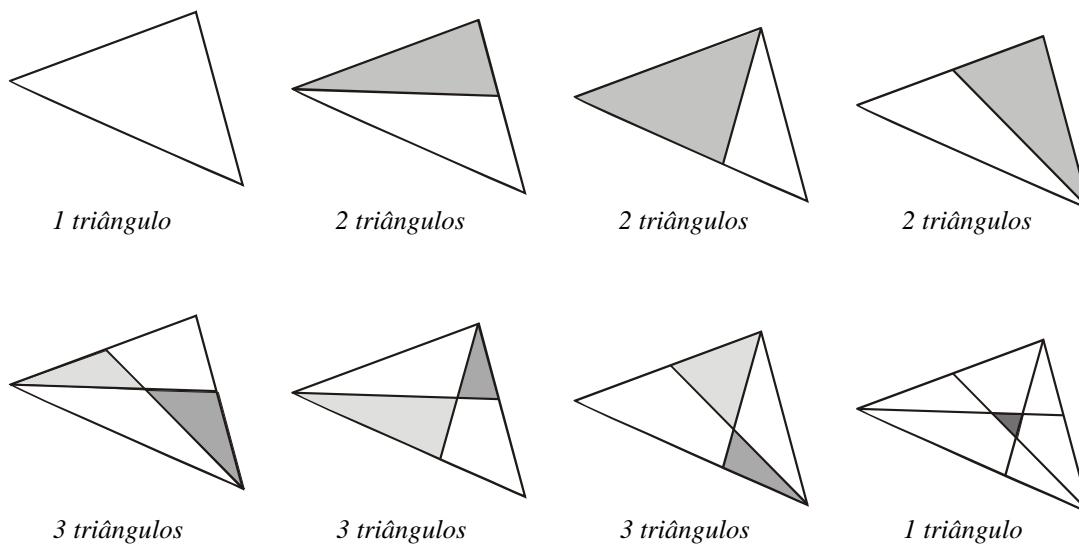
CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **3 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 30. **NENHUM PONTO** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
Resposta	98	40	17	66	34	27	58	15	45	22

As soluções a seguir são puramente para fins didáticos.

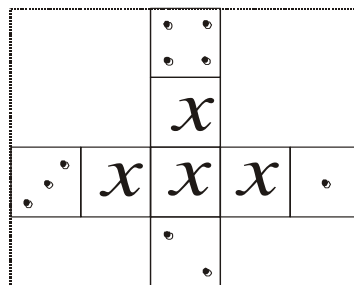
- $10^{100} - 2003 = \frac{1000\dots000}{100 \text{ zeros}} - 2003 = \frac{999\dots97997}{100 \text{ algarismos}}$. Dos cem algarismos do resultado, dois são o 7; portanto o número de algarismos 9 no resultado é **98**.
- $2003^2 = 4012009$ e $2004^2 = 4016016$. Os múltiplos de 100 são $4012100 = 40121 \times 100$, $4012200 = 40122 \times 100$, $4012300 = 40123 \times 100$, ..., $4016000 = 40160 \times 100$. O número de múltiplos de 100 é, então, $40160 - 40120 = \mathbf{40}$.
- Podemos contar o número de triângulos segundo o diagrama abaixo:



O número total de triângulos é $1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 1 = \mathbf{17}$.

- Quando o numerador das horas mostrar 01, 02, ..., 12, o marcador dos minutos apresentará o algarismo 7 nas seguintes situações: 07, 17, 27, 37, 47 e 57, totalizando $12 \times 6 = 72$ exibições no marcador de minutos. Ocorre que o algarismo 7 também aparece no marcador das horas nas situações 07:00, 07:01, etc, ou seja, devem ser contadas mais 60 exibições do 7. O número total de vezes em que aparece o 7 é $72 + 60 = 132$ e metade desse número é **66**.

5. Se as cabines de números 8 e 25 estão em pontos diametralmente opostos na circunferência, então, de cada lado do diâmetro existem $25 - 8 - 1 = 16$ cabines. Logo o número total de cabines da roda gigante é $2 \times 16 + 2 = \boxed{34}$.
6. Os anos bissextos são 1892, 1896, 1904, ..., 2000 (note que 1900 não é bissexto, pois é múltiplo de 100 mas não é de 400; por outro lado, 2000 é bissexto, pois é múltiplo de 100 e de 400). De 1904 a 2000 há $\frac{2000-1904}{4} + 1 = 24 + 1 = 25$ múltiplos de 4. Portanto, o número de anos bissextos desde 1889 até agora é $25 + 2 = \boxed{27}$.
7. As faces laterais em cada dado compõem-se de dois pares de faces opostas, logo nelas a soma é sempre $7 + 7 = 14$. Temos liberdade de escolher os números que vão ficar na face superior e na face inferior, pois há 4 dados na pilha. Para minimizar a soma, escolhamos o 1 para figurar nessas duas faces. Portanto a soma mínima é $2 + 4 \times 14 = \boxed{58}$.
8. No produto $45 \times a3 = 3bcd$, é imediato concluir que $d = 5$, isto é, $45 \times a3 = 3bc5$. Fazendo uma estimativa de a , vemos que as possibilidades são duas: $45 \times 73 = 3285$ e $45 \times 83 = 3735$ de onde se conclui que para $a = 7$ temos $b = 2$ e $c = 8$, e para $a = 8$ temos $b = 7$ e $c = 3$. Portanto, $b + c + d = 2 + 8 + 5 = 7 + 3 + 5 = \boxed{15}$.
9. Sejam a, b, c, d, e os cinco números. Temos $\frac{a+b+c+d+e}{5} = 11 \Leftrightarrow a+b+c+d+e = 55$. Um desses números, digamos a , é o maior possível se, e somente se, a soma dos demais for a menor possível. Isto ocorre para $b+c+d+e = 1+2+3+4 = 10$, de onde vem que $a = 55 - 10 = \boxed{45}$.
10. Seja x o número de pontos que deve aparecer nas metades das peças do dominó conforme o desenho abaixo:



Temos $x \neq 0$ (pois já foi usada a peça 0:3), $x \neq 1$ e $x \neq 4$ (já foi usada a peça 4:1), $x \neq 2$ (já foi usada a peça 2:1), $x \neq 5$ (já foi usada a peça 5:1) e $x \neq 6$ (já foi usada a peça 6:2). Portanto, $x = 3$ (verifica-se que este caso é possível) e a soma dos pontos é $3 + 4 + 1 + 2 + 4 \times 3 = \boxed{22}$.

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Temos $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$ mas $3^5 = 243$ (não serve). Assim, os números obtidos de acordo com as condições do problema são:

$$\begin{aligned} 3 + 9 &= \mathbf{12}, 3 + 27 = \mathbf{30}, 3 + 81 = \mathbf{84}, 9 + 27 = \mathbf{36}, 9 + 81 = \mathbf{90}, 27 + 81 = \mathbf{108}, \\ 3 + 9 + 27 &= \mathbf{39}, 3 + 9 + 81 = \mathbf{93}, 3 + 27 + 81 = \mathbf{111}, 9 + 27 + 81 = \mathbf{117}. \end{aligned}$$

Note que o número $3 + 9 + 27 + 81 = 120$ não serve.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Atribuir **1 ponto** a cada número encontrado.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

PRIMEIRA SOLUÇÃO: Os triângulos ABE e EHF são retângulos em A e H , respectivamente; a medida do ângulo $\hat{B}EF$ é de 90° ; se a medida do ângulo $\hat{H}EF$ é x , então a medida dos ângulos $\hat{E}FH$ e $\hat{A}EB$ é $90^\circ - x$ e, conseqüentemente, a medida do ângulo $\hat{A}BE$ é x ; como $BE = EF$ (são lados do mesmo quadrado), então os triângulos mencionados são congruentes (pelo caso ALA de congruência de triângulos). Utilizando o teorema de Pitágoras, podemos escrever $BE^2 = AB^2 + AE^2$, o que mostra que a área do quadrado $BEFG$ é a soma das áreas dos quadrados $ABCD$ e $FHIJ$, ou seja, $64 + 36 = 100 \text{ cm}^2$.

SEGUNDA SOLUÇÃO: Os triângulos ABE e EHF são retângulos em A e H , respectivamente; a medida do ângulo $\hat{B}EF$ é de 90° ; se a medida do ângulo $\hat{H}EF$ é x , então a medida dos ângulos $\hat{E}FH$ e $\hat{A}EB$ é $90^\circ - x$ e, conseqüentemente, a medida do ângulo $\hat{A}BE$ é x ; como $BE = EF$ (são lados do mesmo quadrado), então os triângulos mencionados são congruentes (pelo caso ALA de congruência de triângulos). Como o quadrado $ABCD$ tem área igual a 64 cm^2 , concluímos que seus lados medem $\sqrt{64} = 8 \text{ cm}$; o quadrado $FHIJ$ tem área igual a 36 cm^2 , logo seus lados medem 6 cm . Temos então, $BA = EH = 8 \text{ cm}$ e $FH = AE = 6 \text{ cm}$.

Utilizando o teorema de Pitágoras, podemos escrever $BE^2 = AB^2 + AE^2 = 8^2 + 6^2 = 100$, ou seja, a área do quadrado $BEFG$ é 100 cm^2 .

TERCEIRA SOLUÇÃO (sem usar o teorema de Pitágoras): Os triângulos ABE e EHF são retângulos em A e H , respectivamente; a medida do ângulo $\hat{B}EF$ é de 90° ; se a medida do ângulo $\hat{H}EF$ é x , então a medida dos ângulos $\hat{E}FH$ e $\hat{A}EB$ é $90^\circ - x$ e, conseqüentemente, a medida do ângulo $\hat{A}BE$ é x ; como $BE = EF$ (são lados do mesmo quadrado), então os triângulos mencionados são congruentes (pelo caso ALA de congruência de triângulos). Como o quadrado $ABCD$ tem área igual a 64 cm^2 , concluímos que seus lados medem $\sqrt{64} = 8 \text{ cm}$; o quadrado $FHIJ$ tem área igual a 36 cm^2 , logo seus lados medem 6 cm . Portanto, $BA = EH = 8 \text{ cm}$ e $FH = AE = 6 \text{ cm}$.

A área do trapézio $ABFH$ é igual a $\frac{AB + FH}{2} \cdot AH = \frac{8 + 6}{2} \cdot 14 = 98 \text{ cm}^2$. Como o trapézio é composto pelos triângulos ABE , EHF e BEF e a área dos triângulos congruentes ABE e EHF é $\frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$, concluímos que a área do triângulo BEF é $98 - 2 \times 24 = 50 \text{ cm}^2$ e, conseqüentemente, a área do quadrado $ABFH$ é o dobro, ou seja, 100 cm^2 .

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- **Para resoluções completas:** atribuir **10 pontos** para uma solução completa equivalente às mostradas. Por solução completa se entende:
 - a) mostrar ou demonstrar a congruência dos triângulos retângulos;
 - b) usar Pitágoras para calcular a área do quadrado (direta ou indiretamente) ou usar a área do trapézio para achar a área da metade do quadrado e, em seguida, a área do quadrado.
- **Para resoluções parciais:**
 - a) calculou corretamente os lados dos quadrados: **1 ponto** para cada quadrado.
 - b) explicou de forma convincente que $\triangle ABE$ e $\triangle EHF$ são congruentes (não é necessária menção explícita ao caso ALA ou LAA_o de congruência): **3 pontos**.
 - c) intuiu que o lado do quadrado mede 10 cm (palpite ou avaliação) sem explicar corretamente mas calculou a área do quadrado corretamente: **2 pontos**.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

PRIMEIRA SOLUÇÃO: Os divisores positivos de um número inteiro N são $d_1, d_2, d_3, \dots, d_k$, tais que $1 = d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \dots \leq d_k = N$ e podemos observar que $1 \cdot N = d_2 \cdot d_{k-1} = d_3 \cdot d_{k-2}$ etc. Por exemplo, os divisores positivos de 12 são 1, 2, 3, 4, 6 e 12, de forma que $1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$. Note que ao excluir os divisores 1 e 12, restam 2, 3, 4 e 6, cujo produto é $2 \times 3 \times 4 \times 6 = (2 \times 6) \times (3 \times 4) = 12 \times 12 = 12^2$. Assim, concluímos que o produto dos divisores positivos de um inteiro, excluindo 1 e o próprio número, é igual ao quadrado do número se, e somente se, o número tem 6 divisores. Portanto, o número é da forma p^5 ou $p^2 \cdot q$, onde p e q são números primos positivos, distintos. Se o número é positivo menor do que 100, temos as 16 seguintes possibilidades:

$2^5 = 32$			
$2^2 \cdot 3 = 12$			
$2^2 \cdot 5 = 20$	$3^2 \cdot 2 = 18$		
$2^2 \cdot 7 = 28$	$3^2 \cdot 5 = 45$	$5^2 \cdot 2 = 50$	
$2^2 \cdot 11 = 44$	$3^2 \cdot 7 = 63$	$5^2 \cdot 3 = 75$	$7^2 \cdot 2 = 98$
$2^2 \cdot 13 = 52$	$3^2 \cdot 11 = 99$		
$2^2 \cdot 17 = 68$			
$2^2 \cdot 19 = 76$			
$2^2 \cdot 23 = 92$			

SEGUNDA SOLUÇÃO: O produto de todos os divisores positivos de um número inteiro N é igual a $N^{\frac{d(N)}{2}}$, onde $d(N)$ é o número de divisores positivos de N . O produto de todos os divisores positivos exceto 1 e N é $\frac{N^{\frac{d(N)}{2}}}{N} = N^{\frac{d(N)}{2}-1}$.

Temos, então, $N^{\frac{d(N)}{2}-1} = N^2 \Leftrightarrow \frac{d(N)}{2} - 1 = 2 \Leftrightarrow \frac{d(N)}{2} = 3 \Leftrightarrow d(N) = 6$. Portanto, o produto dos divisores positivos diferentes de N é o quadrado de N se, e somente se, N tem 6 divisores

positivos. Logo o número é da forma p^5 ou $p^2 \cdot q$, onde p e q são números primos positivos, distintos. Se o número é positivo menor do que 100, temos as 16 seguintes possibilidades:

$2^5 = 32$			
$2^2 \cdot 3 = 12$			
$2^2 \cdot 5 = 20$	$3^2 \cdot 2 = 18$		
$2^2 \cdot 7 = 28$	$3^2 \cdot 5 = 45$	$5^2 \cdot 2 = 50$	
$2^2 \cdot 11 = 44$	$3^2 \cdot 7 = 63$	$5^2 \cdot 3 = 75$	$7^2 \cdot 2 = 98$
$2^2 \cdot 13 = 52$	$3^2 \cdot 11 = 99$		
$2^2 \cdot 17 = 68$			
$2^2 \cdot 19 = 76$			
$2^2 \cdot 23 = 92$			

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- **Para resoluções completas:** atribuir **10 pontos** para uma solução completa equivalente às mostradas.
- **Para resoluções incompletas:** apenas achou os números, sem justificar: **1 ponto** para cada dois números corretos.