XXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – OPM 2002

Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

Soluções Nível 3 – Segunda Fase

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1

Os primeiros números da seqüência são (7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5...) donde vemos que exceto pelos 4 primeiros termos, a seqüência é periódica com período 3. Como 2002 deixa resto 1 quando dividido por 3 o número procurado coincide com aquele que ocupa o 7º. lugar na seqüência, a saber, 11.

Observação:

Para qualquer termo inicial, a seqüência construída de acordo com método descrito no enunciado do problema será eventualmente periódica, (isto é teremos $a_{n+k} = a_k$ para todo $k \geq m$, par certos valores de m e n).

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

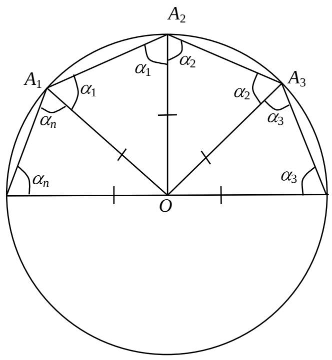
Seja C a circunferência de centro O circunscrita ao polígono $A_1A_2...A_n$. Os triângulos $A_iA_{i+1}O$ (com $A_{n+1} = A_1$) são isósceles. Seja $\alpha_i = O\hat{A}_i A_{i+1}$.

Então

(1) $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_3 + \alpha_4 = ... = \alpha_n + \alpha_1$.

Portanto.

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = ..., \\ \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = ... \\ \alpha_n = \alpha_2 \end{cases}$$



Se n for ímpar, então $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n$, logo todos os ângulos $A_i\hat{O}A_{i+1}$ serão iguais e o polígono será regular. Para n par, não é necessário que todos os ângulos sejam iguais.

Escolhendo $x \neq y$ de modo que $x + y$ = ângulo interno = $\dfrac{180(n-2)}{n}$ e fazendo $x = \alpha_1 = \alpha_3 = ... = \alpha_{n-1}$, $y = \alpha_2 = \alpha_4 = ... = \alpha_n$, obtemos um polígono inscritível não regular com todos os ângulos de mesma medida. Portanto, para n par ≥ 4, existe um polígono de n lados satisfazendo as condições do problema.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Se $n = 3r$, então $n^3 - 3n^2 + 22 = (3r)^3 - 3\cdot(3r)^2 + 22$ é a soma de um múltiplo de 3 com 22, logo não é múltiplo de 3.

Se $n = 3r + 1$, então

$n^3 - 3n^2 + 22 = (3r+1)^3 - 3(3r+1)^2 + 22 = (3r)^3 + 3\cdot(3r)^2 + 3\cdot(3r) + 1 - 3\cdot(3r)^2 - 3\cdot 2\cdot(3r) - 3 + 22 = (3r)^3 - 3\cdot(3r) + 20$,

que também não é múltiplo de 3.

Finalmente, se $n = 3r - 1$, então $n^3 - 3n^2 + 22 = (3r-1)^3 - 3(3r-1)^2 + 22 =$

$= (3r)^3 - 3\cdot(3r)^2 + 3\cdot(3r) - 1 - 3\cdot(3r)^2 + 3\cdot 2\cdot(3r) - 3 + 22 = (3r)^3 - 6\cdot(3r)^2 + 9\cdot 3r + 18$, que é a soma de um múltiplo de 27 com 18, e portanto é múltiplo de 9 mas não de 27, logo a maior potência de 3 que divide um número da forma $n^3 - 3n^2 + 22$ é $3^2 = 9$. Assim, k é no máximo 2.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4

Suponha que os dados estão numerados de 1 a n. A probabilidade de que somente o dado Nº. 1 resulte em 2 é:

$$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}...\frac{5}{6} = \frac{5^{n-1}}{6^n}.$$

Analogamente, a probabilidade de que somente o dado k, $(1 \le k \le n)$ resulte em 2 é

$$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\ldots\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{5}{6}=\frac{5^{n-1}}{6^n}.$$

Portanto, a probabilidade de obter exatamente um 2 é

$$P_n=\frac{5^{n-1}}{6^n}+\frac{5^{n-1}}{6^n}+\ldots+\frac{5^{n-1}}{6^n}=n\cdot\frac{5^{n-1}}{6^n}.$$

Agora observe que $P_n \ge P_{n+1} \Leftrightarrow n\cdot\dfrac{5^{n-1}}{6^n} \ge (n+1)\cdot\dfrac{5^n}{6^{n+1}} \Leftrightarrow 6n \ge 5(n+1) \Leftrightarrow n \ge 5.$

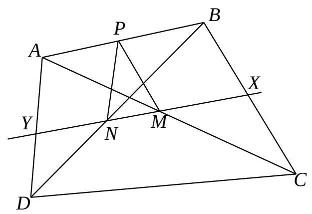
Para $n = 5$, ocorre a igualdade ($P_5 = P_6$), $P_5 = P_6 > P_7 > P_8 > P_9 > \ldots$ e $P_1 < P_2 < P_3 < P_4 = P_5 = P_6$

E a probabilidade é máxima para $n = 5$ ou $n = 6$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5

Sejam M e N os pontos médios de AC e BD e P o ponto médio do lado AB. Então PM é base média do ΔABC e PN base média do ΔABD. Segue que $PM=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{AD}{2}=PN$.

Sendo X e Y as interseções da reta MN com BC e AD, temos então $B\hat{X}M = P\hat{M}N = P\hat{N}M = A\hat{Y}N$ ou $B\hat{X}M = \pi - P\hat{M}N = \pi - P\hat{N}M = A\hat{Y}N$.



SOLUÇÃO ALTERNATIVA:

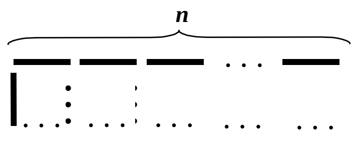
Provaremos que se, $M=\dfrac{A+C}{2}$ e $N=\dfrac{B+D}{2}$ então o vetor $\overrightarrow{MN}$ faz ângulos iguais com $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$. Para isso, como $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$, basta ver que os produtos internos $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC}$ têm o mesmo módulo.

Temos $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AD}=(N-M)\cdot(D-A)=\left(\dfrac{A+C-B-D}{2}\right)\cdot(D-A)=\dfrac{(C-B)\cdot(D-A)-|D-A|^2}{2}=$

$=\dfrac{(C-B)\cdot(D-A)-|C-B|^2}{2}=\dfrac{(D+B-A-C)\cdot(C-B)}{2}=(M-N)\cdot(C-B)=-\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC}$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6

Há 3^n maneiras de colorir a fileira horizontal superior de palitos. O palito vertical mais à esquerda da primeira linha também pode ser colorido de 3 maneiras.



Uma vez definidas as cores dos palitos superior e mais à esquerda de um quadradinho, há duas maneiras de completá-lo segundo as condições do enunciado: se ambos têm mesma cor, há duas escolhas para a cor dos dois palitos restantes; se ambos têm cores diferentes, há duas maneiras de colorir os dois palitos restantes com estas cores.

Assim, para completar a primeira linha de quadrados há $3^n \cdot 3 \cdot 2^n$ maneiras

Da mesma forma, a cor do palito vertical mais à esquerda da segunda linha de quadrados pode ser escolhido de 3 maneiras, e há 2^n maneiras de colorir os demais palitos desra linha. Assim, para $m = 2$, há $3^n \cdot 3 \cdot 2^n \cdot 3 \cdot 2^n$ colorações possíveis.

Analogamente, no caso geral, há $3^n \cdot (3\cdot 2^n)^m = 3^{n+m}\cdot 2^{nm}$ maneiras de realizar a pintura pedida.