XXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – OPM 2002

Segunda Fase – Nível 1 (5ª. ou 6ª. séries)

Soluções Nível 1 – Segunda Fase

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1

a) Os palíndromos entre 2000 e 3000 são da forma 2*aa*2, onde *a* é um algarismo. Logo os próximos quatro serão 2112, 2222, 2332 e 2442.

b) Como o primeiro algarismo é igual ao último, um palíndromo ímpar maior que 2002 deve começar e terminar por um número ímpar maior ou igual a 3. Logo o próximo será 3003.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

Seja S a área do triângulo ABC.

Se $BD = \frac{BC}{4}$, então $(ABD) = \frac{S}{4}$.

Se $AE = \frac{AC}{3}$, então $(AED) = \frac{(ADC)}{3} = \frac{S - \frac{S}{4}}{3} = \frac{\frac{3S}{4}}{3} = \frac{S}{4}$.

Se $DF = \frac{DC}{2}$, então $(DEF) = \frac{(DEC)}{2} = \frac{S - \left(\frac{S}{4} + \frac{S}{4}\right)}{2} = \frac{S}{4}$.

Se $EG = EC$, então $(GFC) = \frac{(EFC)}{2} = \frac{S - \left(\frac{3S}{4}\right)}{2} = \frac{S}{8}$.

Como $(GFC) = 40$ temos $\frac{S}{8} = 40 \Leftrightarrow S = 320$ alqueires.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Uma possível solução é:

2002, 200, 20, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 51, 102, 204, 408, 816, 1632, 163, 326, 652, 1304, 130, 13.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4

Como os sapatos de Marisa eram azuis, e nem o vestido nem os sapatos de Júlia eram brancos, conclui-se que os sapatos de Júlia eram pretos e portanto os sapatos de Ana eram brancos.

O vestido de Ana era branco, pois era a única que usava vestido e sapatos da mesma cor; conseqüentemente, o vestido de Júlia era azul e o de Marisa era preto.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5

A soma dos pontos é 40. Segundo as regras do jogo, as possibilidades são:

20 – 20 → 20 + 20 (1)
20 – 15 – 5 → 20 + 15 + 5 (2)
20 – 10 – 10 → 20 + 10 + 10 (3)
20 – 10 – 5 – 5 → 20 + 10 + 5 + 5 (4)
20 – 5 – 5 – 5 – 5 → 20 + 5 + 5 + 5 + 5 (5)

15 – 15 – 10 → 15 + 15 + 10 (6)
15 – 15 – 5 – 5 → 15 + 15 + 5 + 5 (7)
15 – 10 – 10 – 5 → 15 + 10 + 10 + 5 (8)
15 – 10 – 5 – 5 – 5 → 15 + 10 + 5 + 5 + 5 (9)
15 – 5 – 5 – 5 – 5 – 5 → 15 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 (10)

10 → 10 + 10 + 10 + 10 (11)

10 – 10 – 5 – 5 → 10 + 10 + 10 + 5 + 5 (12)

10 – 5 – 5 – 5 – 5 → 10 + 10 + 5 + 5 + 5 + 5 (13)

10 – 5 – 5 – 5 – 5 – 5 – 5 não dá, pois há apenas 5 varetas verdes.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6

Como a diferença entre o 17 e o 3 é 14, esses números devem estar em posições afastadas de 14 casas, contadas na horizontal ou vertical.

Portanto 17 e 3 devem ocupar as extremidades de uma das diagonais do tabuleiro.

A partir disso, o preenchimento das diagonais é feito de maneira única. E uma maneira de se preencher o tabuleiro é a seguinte:

17	16	15	14	13	12	11	10
16	15	14	13	12	11	10	9
15	14	13	12	11	10	9	8
14	13	12	11	10	9	8	7
13	12	11	10	9	8	7	6
12	11	10	9	8	7	6	5
11	10	9	8	7	6	5	4
10	9	8	7	6	5	4	3

a soma dos números escritos nas diagonais é: $8 \times 10 + (3 + 5 + ... + 17) = 160$.