Soluções - Nível 3

1. (20 pontos) Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumpre $f(2) = 1$ e satisfaz as seguintes propriedades, para todo natural $n \geq 1$:

   i) $f(3n) = 3f(n)$;

   ii) $f(3n + 1) = 3f(n) + 1$;

   iii) $f(3n + 2) = 3f(n)$.

   Determine $f(2021)$.

Solução

Basta fatorar 2021 em termos de potências de 3 e usar as propriedades da função.

Temos:

$$\begin{aligned}
f(2021) &= f(3 \cdot 673 + 2) \\
&= 3 \cdot f(673) \\
&= 3 \cdot f(3 \cdot 224 + 1) \\
&= 3^2 \cdot f(224) + 3 \\
&= 3^2 \cdot f(3 \cdot 74 + 2) + 3 \\
&= 3^3 \cdot f(74) + 3 \\
&= 3^3 \cdot f(3 \cdot 24 + 2) + 3 \\
&= 3^4 \cdot f(24) + 3 \\
&= 3^4 \cdot f(3 \cdot 8) + 3 \\
&= 3^5 \cdot f(8) + 3 \\
&= 3^5 \cdot f(3 \cdot 2 + 2) + 3 \\
&= 3^6 \cdot f(2) + 3 \\
&= 732.
\end{aligned}$$

2. (20 pontos) Dois círculos C_1 e C_2 se intersectam em dois pontos distintos M e N. Seja AB uma reta que é tangente a C_1 no ponto A e tangente a C_2 no ponto B, de modo que o ponto M fique mais perto de AB do que do ponto N.

   Seja CD a reta paralela a AB e passando pelo ponto M, com C em C_1 e D em C_2.

   As retas AC e BD se encontram no ponto E; as retas AN e CD se encontram em P; as retas BN e CD se encontram em Q. Mostre que o comprimento $\overline{EP}$ é igual ao comprimento $\overline{EQ}$.

   Observação: Entenda-se por reta AB como sendo a única reta que passa pelos pontos A e B.

Solução

Deixe NM interceptar AB em M'. Temos que $M'A = M'B$ uma vez que MN é o eixo radical. Como NPQ e NAB são semelhantes, temos que M é o ponto médio de PQ.

Agora basta mostrar que $ME \perp PQ$. Observe que A é o ponto médio do arco CM. Portanto, $\angle MAB = \angle BAE$.

Da mesma forma, descobrimos que $\angle MBA = \angle ABE$. Segue-se que $ME \perp AB$ e, portanto, $ME \perp PQ$.

Concluímos então que $\triangle EPQ$ é isósceles, e portanto segue o resultado

3. (20 pontos) Considere o polinômio

$$Q(x) = x^{10} + b_9x^9 + b_8x^8 + \cdots + b_1x + 1,$$

no qual todos os coeficientes $b_1, b_2, \ldots, b_9$ são números reais maiores ou iguais a zero (ou seja $b_j \geq 0$, para $j = 1, \ldots, 9$).

Sabendo que todas as raízes do polinômio $Q(x)$ são números reais, mostre que

$$Q(2) \geq 3^{10}.$$

Sugestão: Você pode usar que a média aritmética de três números positivos é sempre maior ou igual a média geometrica desses três números.

Solução

Primeiro, observe que todas as raízes de $Q(x)$ são obrigatoriamente negativas, uma vez que os coeficientes b_i são todos não-negativos.

Assim, sejam $-\beta_1, -\beta_2, \ldots, -\beta_{10}$ essas raízes, com $\beta_i > 0$, $i = 1, \ldots, 10$. Podemos, então, escrever

$$Q(x) = (x + \beta_1)(x + \beta_2)\ldots(x + \beta_{10}).$$

Logo,

$$Q(2) = (2 + \beta_1)(2 + \beta_2)\ldots(2 + \beta_{10}) = (1 + 1 + \beta_1)(1 + 1 + \beta_2)\ldots(1 + 1 + \beta_{10})$$

Lembrando que a média aritmética de 3 números positivos é sempre maior ou igual a sua média geométrica, temos

$$\frac{1 + 1 + \beta_i}{3} \geq \sqrt[3]{1.1.\beta_i} \iff 1 + 1 + \beta_i \geq 3\sqrt[3]{\beta_i}, \quad i = 1, \ldots, 10.$$

Portanto,

$$Q(2) = (2 + \beta_1)(2 + \beta_2)\ldots(2 + \beta_{10}) \geq 3^{10}\sqrt[3]{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{10}}$$

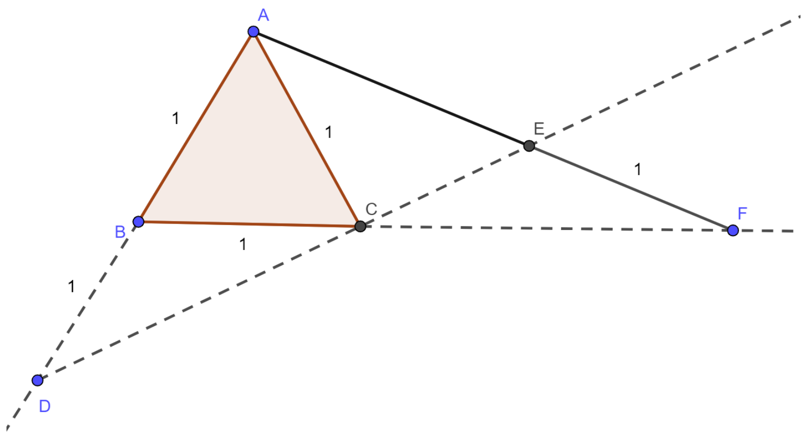
Agora, sabemos das Relações de Girard que o produto das raízes vale 1, ou seja, $(-\beta_1)(-\beta_2)\ldots(-\beta_{10}) = 1 \implies \sqrt[3]{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{10}} = 1$.

Desta forma, concluímos que $Q(2) \geq 3^{10}$.

4. (20 pontos) Considere ABC um triângulo equilátero de lado medindo 1 e D ($D \neq A$) um ponto pertencente à reta AB de modo que o comprimento $\overline{BD} = 1$. Além disso, considere os pontos E e F satisfazendo as seguintes condições, de acordo com a figura abaixo:

- Os pontos A, E e F estão alinhados;
- O ponto E está entre A e F e sobre a reta DC
- O ponto F está sobre a reta BC e temos o comprimento $\overline{EF} = 1$.

Determine o comprimento do segmento $\overline{AE}$.



Solução

Como o triângulo BCD é isósceles, podemos deduzir que a medida do ângulo $B\widehat{C}D$ é igual a 30^o. Logo, o ângulo $A\widehat{C}D$ é reto. Em seguida, tracemos um segmento $\overline{EG}$ de modo que $\overline{EG} \parallel \overline{AC}$. Pela semelhança dos triângulos FEG e FAC, sendo $AE = x$ segue que

$$EG = \frac{1}{x+1}. \tag{1}$$

Por outro lado, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos $EC = \sqrt{x^2-1}$. Desde que

$$tg\ 30^o = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{EG}{EC},$$

podemos deduzir que

$$EG = \sqrt{\frac{x^2-1}{3}}. \tag{2}$$

Portanto, de (1) e (2), segue que

$$\frac{1}{x+1} = \sqrt{\frac{x^2-1}{3}} \implies x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0 \implies x^3(x+2) - 2(x+2) = 0$$

e, consequentemente, $(x^3-2)(x+2) = 0$. Assim, devemos ter $x = \sqrt[3]{2}$.

5. (20 pontos) Considere o conjunto de números naturais $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$.

Para cada subconjunto $X \subset A$, denote por $p(X)$ o produto dos elementos de X. Por exemplo, se $X = \{1, 3, 5\}$ então

$$p(\{1, 3, 5\}) = 1 \times 3 \times 5 = 15.$$

Por convenção, adote:

- $p(\emptyset) = 1$, onde $\emptyset$ representa o conjunto vazio;
- $p(\{n\}) = n$, para cada $n = 1, \ldots, 100$.

Determine o número $s(A)$ que representa a soma de todos os $p(X)$, com X subconjunto de A. Isto é, calcule a soma

$$s(A) = \sum_{X \subseteq A} p(x).$$

Solução

Inicialmente vejamos um fato básico sobre o conjunto das partes $\mathcal{P}(Z)$ de um conjunto qualquer Z. Dado um elemento $w \notin Z$, $\mathcal{P}(Z \cup \{w\})$ é a reunião disjunta de dois conjuntos de iguais cardinalidades: um deles $\mathcal{P}(Z)$; e outro que reúne conjuntos da forma $X \cup \{w\}$, com $X \in \mathcal{P}(Z)$. Outro modo de concluir isto é notar que, para cada subconjunto $Y \in \mathcal{P}(Z \cup \{w\})$ com $w \notin Y$, existe um único subconjunto de $Z \cup \{w\}$ da forma $Y \cup \{w\}$. Com isso, podemos escrever

$$\mathcal{P}(Z \cup \{w\}) = \mathcal{P}(Z) \dot{\cup} \{X \cup \{w\} : X \subset Z\}.$$

Retornando ao problema original, denote por $s(Z)$ a soma dos produtos $p(X)$, com $X \subset Z \subset \mathbb{N}$. Com base no fato anterior e na dica apresentada,

$$\begin{aligned} s(A) = s(\{1, \ldots, 100\}) &= \sum_{X \subset A} p(X) \\ &= \sum_{X \subset \{1, \ldots, 99\}} p(X) + \sum_{X \subset \{1, \ldots, 99\}} p(X \cup \{100\}) \\ &= s(\{1, \ldots, 99\}) + \sum_{X \subset \{1, \ldots, 99\}} 100 p(X) \\ &= s(\{1, \ldots, 99\}) + 100 \cdot \left(\sum_{X \subset \{1, \ldots, 99\}} p(X) \right) \\ &= s(\{1, \ldots, 99\}) + 100 \cdot s(\{1, \ldots, 99\}) \\ &= 101 \cdot s(\{1, \ldots, 99\}). \end{aligned}$$

Similarmente,

$$s(\{1, \ldots, 99\}) = s(\{1, \ldots, 98\}) + 99 \cdot s(\{1, \ldots, 98\}) = 100 \cdot s(\{1, \ldots, 8\}).$$

Portanto, prosseguindo desta forma, concluímos que

$$s(A) = s(\{1, \ldots, 100\}) = 101 \cdot s(\{1, \ldots, 99\}) = 101 \cdot 100 \cdot s(\{1, \ldots, 98\}) = 101 \cdot 100 \cdots 3 \cdot s(\{1\}) = 101!.$$