Prova - Nível 3

1. (20 pontos) Determine todas as soluções inteiras e positivas da equação

$$x^2 - xy = 49.$$

Entende-se por uma solução inteira e positiva da equação, um par ordenado (x, y), em que x e y são números **inteiros** e **positivos** que satisfazem a referida equação.

2. (20 pontos) Em uma loja que vende objetos e rações para animais, há três tipos diferentes de pacotes de uma determinada ração para cachorros: pacotes de 1kg, de 2kg e de 3kg. Sabe-se que, no total, a loja possui 161 pacotes desse tipo de ração e que a soma dos pesos de todos esses pacotes é de 326 kg. A loja possui mais pacotes de 1kg ou de 3kg? (Justifique sua resposta!)

3. (20 pontos) Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2}{4^x + 2}$.

a) Mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}$, vale

$$f(x) + f(1 - x) = 1.$$

b) Sendo

$$A = f\left(\frac{1}{2022}\right) + f\left(\frac{2}{2022}\right) + f\left(\frac{3}{2022}\right) + \ldots + f\left(\frac{2020}{2022}\right) + f\left(\frac{2021}{2022}\right),$$

calcule $2A + 1$.

Dica: Para o item b), você pode usar o item a).

4. (20 pontos) Para cada tripla ordenada (a, b, c) de inteiros positivos, podemos definir $m(a, b, c)$ como sendo o valor mínimo atingido pela função quadrática $p(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$. Por exemplo, $m(1, 1, 5)$ é o valor mínimo atingido pela função $p(x) = x^2 + x + 5$, o qual é $m(1, 1, 5) = 19/4$.

a) Determine o maior valor possível para $m(a, b, c)$ quando $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Dica: Lembre que o valor mínimo de $p(x) = ax^2 + bx + c$ é dado por $-\dfrac{\Delta}{4a} = c - \dfrac{b^2}{4a}$.

b) Ao escolhermos ao acaso a, b e c no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, calcule a probabilidade de obtermos a igualdade

$$m(a, b, c) = 0.$$

5. (20 pontos) Quatro circunferências de mesmo raio x e um quadrado estão colocados dentro de uma outra circunferência de raio 8, de modo que as quatro circunferências interiores tangenciam a circunferência de raio maior e tangenciam o quadrado (veja Figura 1 abaixo).

Considere que a configuração geométrica estabelecida na Figura 1 é preservada da seguinte forma: o centro e o raio da maior circunferência estão fixos; o centro do quadrado está fixo; os pontos de tangência das circunferências internas com a externa estão fixos; o raio x pode variar de modo que as circunferências menores preservam tangência com a maior e com o quadrado, o quadrado permaneça no máximo inscrito na maior circunferência, e a interseção entre duas circunferências menores seja no máximo um ponto. Perceba que a variação do raio x causa variação no tamanho do quadrado, e o valor x oscila entre um valor mínimo e um valor máximo.

Desta forma, encontre os valores máximo e mínimo que x pode assumir.

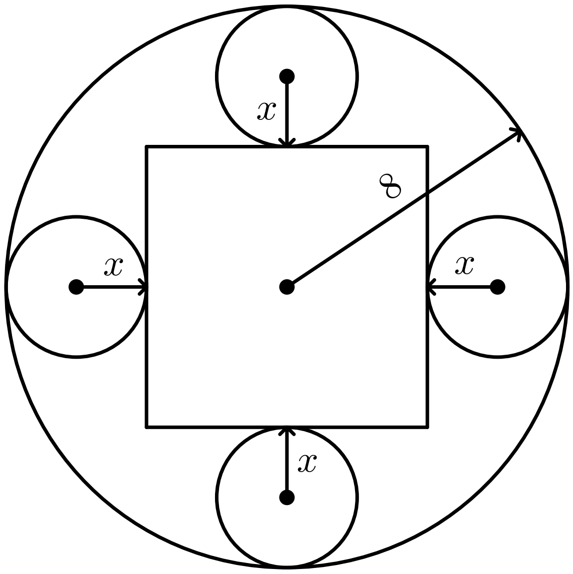

Figura 1

Boa prova!