Exercícios Resolvidos sobre Probabilidade

Lenimar N. Andrade

UFPB

19 de maio de 2008

Resumo

Um **experimento aleatório** é aquele cujo resultado não pode ser determinado antes da sua realização. Por exemplo, jogar um dado e observar o número que vai aparecer na sua face superior.

O **espaço amostral** de um experimento aleatório é o conjunto de todos os possíveis resultados do experimento. Por exemplo, no lançamento de um dado, ao observarmos o número na sua face superior, o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Qualquer subconjunto de um espaço amostral é um **evento**. Por exemplo, no lançamento de um dado, o evento "*ocorrência de número ímpar na face superior*" é o conjunto $A = \{1, 3, 5\}$. Quando o subconjunto é unitário, o evento chama-se **elementar**.

Resumo

Um **espaço equiprovável** é um espaço amostral finito onde os eventos elementares têm as mesmas chances de ocorrência.

Probabilidade

Em um espaço amostral equiprovável Ω, a **probabilidade** de ocorrer um evento A como sendo o número $P(A)$, $0 \leq P(A) \leq 1$, definido por

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega}$$

Exemplo

No lançamento de um dado, consideremos o evento A: "*ocorrência de número ímpar na face superior*". O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $A = \{1, 3, 5\}$ e a probabilidade de A é $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Resumo

Suponhamos A e B eventos de um espaço amostral equiprovável Ω.

Probabilidade da união

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Em particular, quando $A \cap B = \emptyset$ (A e B *mutuamente exclusivos*) temos $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$, e daí, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Probabilidade do evento complementar

$$P(A^c) = P(\complement_\Omega A) = 1 - P(A)$$

Isso significa que a probabilidade de não ocorrer determinado evento é igual a 1 menos a probabilidade dele ocorrer.

Resumo

Probabilidade condicional

Se A e B são eventos de um espaço amostral Ω, a probabilidade de A ocorrer sabendo que B já ocorreu é definida por

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

A partir daí, obtemos que $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$.

Eventos independentes

A e B são **independentes** quando $P(A|B) = P(A)$, ou seja, quando

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Exercício 1

Um dado é lançado e observa-se o número na face superior. Calcule a probabilidade de ocorrência dos eventos:

- $A =$ ocorre um número primo;
- $B =$ ocorre um número maior do que 4;
- $C = A \cap B =$ ocorre um número primo maior do que 4;
- $D = A \cup B =$ ocorre número primo ou número maior do que 4.

Exercício 1 – Solução

O espaço amostral do lançamento do dado é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- $A = \{2, 3, 5\}$. Logo, $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$;
- $B = \{5, 6\}$. Logo, $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;
- $C = A \cap B = \{5\}$. Logo, $P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$;
- $D = A \cup B = \{2, 3, 5, 6\}$. Logo, $P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Observação

Note que $P(D)$ também pode ser calculado pela fórmula:

$$P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Exercício 2

Lança-se um par de dados não viciados. Qual a probabilidade de o mínimo dos dois números ser menor do que 2?

Solução

Temos:

- $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\cdots,(6,5),(6,6)\} \Rightarrow n(\Omega) = 36$
- $A =$ "*mínimo dos dois números ser menor do que 2*"
  $\Rightarrow A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\} \Rightarrow n(A) = 6$

Logo, a probabilidade procurada é

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Exercício 3

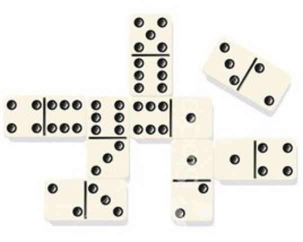
Em determinado momento, em uma casa estão 10 pessoas: 5 mães e 5 filhos. Os 5 filhos estão em uma sala e suas respectivas mães estão na cozinha. Escolhe-se ao acaso uma mãe e um filho. Qual a probabilidade do filho não ser escolhido com a sua respectiva mãe?

Solução

Consideremos os filhos F_1, F_2, F_3, F_4 e F_5 e as respectivas mães M_1, M_2, M_3, M_4 e M_5. Escolhido um filho aleatoriamente, a probabilidade dele ser F_1 é de $1/5$. Escolhida uma mãe aleatoriamente, a probabilidade dela não ser M_1 é $4/5$. Logo, a probabilidade de escolher F_1 e uma mãe que não seja a sua é igual a $\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{25}$.
Como temos 5 filhos, a probabilidade de escolher um filho e uma mãe que não seja a sua é

$$\frac{4}{25} + \frac{4}{25} + \frac{4}{25} + \frac{4}{25} + \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} = 80\%.$$

Exercício 4



Em um dominó com 28 peças escolhe-se uma peça ao acaso e verifica-se a soma dos pontos da peça. Qual a probabilidade de se obter uma soma maior do que 8?

Exercício 4 – Solução

Consideremos o espaço amostral Ω: *"escolher uma peça de um dominó"* e o evento A: *"escolher uma peça em que a soma dos pontos é maior do que 8"*. Temos:

- $\Omega = \{(0,0),(0,1),(0,2),\cdots,(6,6)\} \Rightarrow n(\Omega) = 28;$
- $A = \{(3,6),(4,5),(4,6),(5,5),(5,6),(6,6)\} \Rightarrow n(A) = 6;$
- $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}.$

Observação

Note que, em um dominó, (a,b) e (b,a) são uma mesma peça.

Exercício 5

De um baralho com 52 cartas, uma é retirada aleatoriamente. Determine qual é a probabilidade dos eventos:

1. A : *"ocorre rei de copas"*
2. B : *"ocorre carta de naipe espadas"*
3. C : *"ocorre um ás"*
4. D : *"ocorre carta diferente de valete"*

Exercício 5 – Solução

1. Como só existe um rei de copas, a probabilidade de retirá-lo é $P(A) = \frac{1}{52} = 1,92\%$
2. Existem 13 cartas de espadas; logo, a probabilidade de retirar uma delas é $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 25\%$
3. Existem 4 ases em um baralho; a probabilidade de retirar um deles é $P(C) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} = 7,69\%$
4. Consideremos o evento V : "*ocorre um valete*" . Como existem 4 valetes em um baralho, temos que $P(V) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.
   A probabilidade procurada é a do evento complementar V^c:
   $P(D) = P(V^c) = 1 - P(V) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13} = 92,3\%$.

Escrever as probabilidades obtidas em forma de porcentagens facilita comparações entre elas.

Exercício 6

Quatro moedas são lançadas. Qual a probabilidade de obtermos 2 caras e 2 coroas como resultado desses lançamentos?

Exercício 6 – Solução

Denotando por K a obtenção de cara como face superior da moeda lançada e por C a obtenção de coroa, temos os seguintes eventos:

- $\Omega = \{(K,K,K,K),(C,K,K,K),(K,C,K,K),\cdots,(C,C,C,C)\}$ e $n(\Omega) = 2^4 = 16$
- $A = \{(K,K,C,C),(K,C,C,K),(C,C,K,K),(C,K,C,K),(K,C,K,C),(C,K,K,C)\}$ e $n(A) = P_4^{2,2} = 6$

Portanto, $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

Observação

Este problema pode ser generalizado: lançando-se n moedas, a probabilidade de obtermos p caras e q coroas (com $p+q=n$) é dada por $P_n^{p,q}/2^n$.

Exercício 7

Um grupo é composto de 7 homens e 4 mulheres. Três pessoas são escolhidas ao acaso para formarem uma comissão. Qual a probabilidade dessa comissão ser formada apenas por homens?

Solução

- O espaço amostral Ω é formado por todas as combinações dessas 11 pessoas, tomadas 3 a 3. Logo, $n(\Omega) = C_{11,3} = \frac{11!}{3!\ 8!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165$.
- Com os 7 homens, é possível formar uma comissão com 3 deles de um total de $C_{7,3} = \frac{7!}{3!\ 4!} = 35$ maneiras. Assim, se A for o evento "*formar comissão com 3 homens*", temos $n(A) = 35$.
- Logo, a probabilidade da comissão ser formada apenas por homens é de

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{35}{165} = \frac{7}{33} = 21,21\%$$

Exercício 8

Dez jovens são dispostos em uma fila, entre eles estão Jarbas e Diana. Qual a probabilidade de Jarbas e Diana ficarem juntos nessa fila?

Solução

Nessa fila, os dez jovens podem ser permutados de um total de $10!$ maneiras.

Supondo que Jarbas e Diana fiquem juntos, nas permutações eles se comportam como se fossem uma única pessoa, podendo haver permutações entre os dois. Assim, o número de maneiras das quais eles ficam juntos na fila é igual a $2! \cdot 9!$.

$$\overbrace{\boxed{*}\boxed{*}\boxed{*}\,\underbrace{\boxed{\mathrm{J}}\boxed{\mathrm{D}}}_{2!}\,\boxed{*}\boxed{*}\boxed{*}\boxed{*}\boxed{*}}^{9!}$$

Portanto, a probabilidade dos dois ficarem juntos é de $\frac{2! \cdot 9!}{10!} = \frac{1}{5}$.

Exercício 9

Sejam A e B eventos independentes de um espaço amostral equiprovável. Mostre que os eventos complementares A^c e B^c também são independentes.

Solução

- Como A e B são independentes, temos $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- Devemos verificar que $P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \cdot P(B^c)$.
- Temos que: $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) = (1 - P(A)) - P(B)(1 - P(A)) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(A^c) \cdot P(B^c)$.

Exercício 10

Uma urna contém 15 bolas numeradas de 1 a 15. Retirando-se ao acaso uma bola dessa urna, considere os eventos:

- A : *"a bola retirada possui um número múltiplo de 2"*
- B : *"a bola retirada possui um número múltiplo de 3"*

Qual a probabilidade do evento A ocorrer sabendo que B ocorreu ?

Exercício 10 – Solução

Note que:

- $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$
- $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$
- $A \cap B = \{6, 12\}$

Portanto, a probabilidade de A ocorrer, dado que B ocorreu, é igual a

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{5}.$$

Exercício 11

Sorteia-se um número de 1 a 20.

1. Qual a probabilidade desse número ser par, sabendo que o número sorteado é maior do que 13?
2. Qual a probabilidade desse número ser maior do que 13, sabendo que o número sorteado é par?

Solução

$A =$ "*número sorteado é par*" $= \{2, 4, 6, \cdots, 20\}$
$B =$ "*número sorteado é maior do que 13*" $= \{14, 15, \cdots, 20\}$
Portanto, $A \cap B = \{14, 16, 18, 20\}$ e as probabilidades procuradas são:

1. $P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{4}{7} = 57,14\%$
2. $P(B|A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 40\%$

Exercício 12

Uma caixa 1 contém 10 peças das quais 2 são defeituosas e outra caixa 2 contém 8 peças das quais 3 são defeituosas. Retiram-se duas peças aleatoriamente, uma de cada caixa.

1. Qual a probabilidade de ambas serem defeituosas?
2. Qual a probabilidade das duas não serem defeituosas?
3. Sabendo que apenas uma peça é defeituosa, qual a probabilidade da peça defeituosa ter sido retirado da caixa 2?

Solução

Consideremos os eventos A: "*a peça escolhida da caixa 1 é defeituosa*" e B: "*a peça escolhida da caixa 2 é defeituosa*". Observe que esses eventos são independentes: retirar uma peça defeituosa de uma caixa, não interfere na retirada da outra. Logo, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Exercício 12 - Solução

Do enunciado, temos que $P(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ e $P(B) = \frac{3}{8}$.

1. Probabilidade de ambas serem defeituosas $= P(A \cap B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{40}$;
2. Probabilidade de ambas não serem defeituosas $= P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \cdot P(B^c) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{2}$;
3. Seja C o evento: "*exatamente uma das peças escolhidas é defeituosa*". Queremos calcular $P(B|C)$.
   $P(B \cap C) =$ probabilidade de apenas a peça escolhida em B ser defeituosa (e a de A não defeituosa) $= P(B \cap A^c) = P(B) \cdot P(A^c) = P(B) \cdot (1 - P(A)) = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{10}$
   C é o complementar de "*ambas as peças são defeituosas ou ambas não são defeituosas*". Daí, $P(C) = P([(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)]^c)$ $= 1 - [P(A \cap B) + P(A^c \cap B^c)] = 1 - \frac{3}{40} - \frac{1}{2} = \frac{17}{40}$, e, finalmente,

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{3/10}{17/40} = \frac{12}{17}.$$