Exercícios Resolvidos sobre Indução

Lenimar N. Andrade

UFPB

3 de maio de 2008

Exemplo 1

Um método de demonstração denominado demonstração por indução matemática deve ser utilizado sempre que quisermos mostrar que determinada propriedade relacionada com o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é sempre verdadeira.
Suponhamos, por exemplo, que tenhamos interesse em calcular a soma dos n primeiros números ímpares. Temos, então, os seguintes resultados:

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2$$

Exemplo 1

$$\underbrace{1+3+5+7+9+11+13}_{7\ \text{parcelas}} = 49 = 7^2$$

$$\underbrace{1+3+5+7+9+11+13+15}_{8\ \text{parcelas}} = 64 = 8^2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

Pela observação dos resultados anteriores, poderíamos chegar à conclusão que a soma dos n primeiros números ímpares positivos é igual ao quadrado da quantidade de números somados, ou seja, igual a n^2.

A conclusão anterior é verdadeira. Mas, para ter certeza disso, só usando o Princípio de Indução. Faremos isso no Exercício 1 a seguir.

Exemplo 2

Nem sempre chegamos a conclusões verdadeiras observando apenas um pequeno número de casos particulares de determinada fórmula.

Consideremos os números da forma $x_n = n^2 + n + 41$, onde n é um inteiro positivo.

- Atribuindo a n os valores $1, 2, 3, 4, 5$ obtemos para x_n, respectivamente, os seguintes valores: $43, 47, 53, 61, 71$. Esses resultados obtidos são todos números primos.
- Continuando atribuindo valores inteiros de 6 a 39 a n, continuamos obtendo apenas resultados primos para x_n.
- Aqui, poderíamos concluir que todos os resultados obtidos vão ser primos, para quaisquer valores de n. Mas isso está errado!

Fazendo $n = 40$, obtemos $x_n = 1681$ que não é um número primo (é divisível por 41).

Indução Matemática

Para demonstrarmos que uma propriedade envolvendo os números naturais é sempre verdadeira, precisamos usar o **Princípio de Indução Matemática**, também conhecido como **Princípio de Indução Finita** ou, simplesmente, **Princípio de Indução**.

Princípio de Indução

Seja $P(n)$ uma propriedade relacionada com os números naturais da qual sabemos que:

- $P(n)$ é verdadeira para um valor inicial (que pode ser, por exemplo, $n = 1$)
- Se $P(n)$ for verdadeira para $n = k$, então também é verdadeira para $n = k + 1$.

Então a propriedade $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n a partir do valor inicial.

Indução Matemática

Comparação

Uma analogia do Princípio de Indução é um conjunto de pedras de dominó próximas umas das outras. Cada pedra (na posição k) derruba a seguinte (na posição $k+1$) e, se a primeira pedra ($k=1$) cair, cairão todas as pedras.

Exercício 1

Mostrar que

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

para todo natural n, $n \geq 1$.

Solução

1. Caso inicial: $n = 1$.
   Para $n = 1$, $2n - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$ e daí o primeiro membro da igualdade reduz-se apenas a 1. O segundo membro quando $n = 1$ é igual a $n^2 = 1^2 = 1$. Portanto, quando $n = 1$ a fórmula reduz-se a

   $$1 = 1$$

   que é uma sentença verdadeira.
2. Admitindo a fórmula válida para $n = k$, vamos mostrar que também vale para $n = k + 1$.

Exercício 1

Substituindo $n = k$ na fórmula dada obtemos a chamada *hipótese de indução:*

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

Substituindo $n = k + 1$ na fórmula, obtemos:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1)}_{k^2} + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

que é equivalente a $k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$, uma igualdade verdadeira.

Pelo Princípio de Indução, chegamos à conclusão de que a fórmula

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

é verdadeira para todo inteiro n, $n \geq 1$.

Exercício 1

Observação

Ainda com relação à fórmula $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ uma dúvida freqüente é a sua interpretação para valores particulares de n.

- Por exemplo, para $n = 3$, temos $2n - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$ e a fórmula reduz-se a $1 + 3 + 5 = 3^2$.
- Outro exemplo, para $n = 6$, temos $2n - 1 = 12 - 1 = 11$ e a fórmula reduz-se a $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2$.
- Para $n = k + 1$, temos $2n - 1 = 2(k + 1) - 1 = 2k + 1$ e a fórmula dada se escreve como sendo

$$\underbrace{\underbrace{1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)}_{n=k} + (2k + 1)}_{n=k+1} = (k + 1)^2.$$

Exercício 1

Observação

Ainda com relação a mesma fórmula anterior, para $n = k + 2$, temos $2n - 1 = 2(k + 2) - 1 = 2k + 3$ e a fórmula fica

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k-1)}_{n=k} + (2k+1)}_{n=k+1} + (2k+3)}_{n=k+2} = (k+2)^2$$

Exercício 2

Mostrar que para n inteiro tal que $n \geq 1$ temos:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

1. Caso inicial: para $n = 1$ a fórmula reduz-se a $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}$ que é verdadeira.
2. Admitindo que $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$ (caso $n = k$), vamos verificar o que acontece quando $n = k + 1$:
$$\underbrace{\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}}_{\frac{k}{2k+1}} + \frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}$$
$$\Rightarrow \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3} \Rightarrow \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$$ que é verdadeira $\big($porque dividindo-se $2k^2 + 3k + 1$ por $2k + 1$, obtém-se $k + 1\big)$.

Logo, por indução, a fórmula fica demonstrada.

Exercício 3

Mostrar que para n inteiro tal que $n \geq 1$ temos:

$$(1+1)(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{n}) = n+1.$$

1. Caso inicial: para $n = 1$ a fórmula reduz-se a $1 + 1 = 1 + 1$ que é verdadeira.
2. Admitindo que $(1+1)(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{k}) = k+1$ (caso $n = k$), vamos verificar o caso $n = k+1$:
   $\underbrace{(1+1)(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{k})}_{k+1} \cdot (1+\frac{1}{k+1}) = (k+1)+1$
   $\Rightarrow (k+1)(1+\frac{1}{k+1}) = k+2 \Rightarrow (k+1)(\frac{k+2}{k+1}) = k+2$ que é verdadeira.

Logo, de acordo com o Princípio de Indução, a fórmula é verdadeira para todo inteiro $n \geq 1$.

Exercício 4

Para todo n natural, mostre que $n^3 + 2n$ é múltiplo de 3.

1. Caso inicial: para $n = 0$ temos que $0^3 + 2 \cdot 0 = 0$ é múltiplo de 3 (verdadeiro).
2. Admitindo que $k^3 + 2k$ seja múltiplo de 3 (caso $n = k$), vamos verificar quando $n = k + 1$:
   $(k+1)^3 + 2(k+1) = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (2k + 2) =$
   $(k^3 + 2k) + (3k^2 + 3k + 3) = \underbrace{k^3 + 2k}_{\text{múltiplo de 3 (caso } n=k)} + \underbrace{3(k^2 + k + 1)}_{\text{múltiplo de 3}}$
   que é uma soma de múltiplos de 3, logo, é um múltiplo de 3.

Logo, pelo Princípio de Indução, a propriedade fica demonstrada para todo natural $n \geq 0$.

Exercício 5

Mostre que $2^n > n$ para todo n natural.

1. Caso inicial: para $n = 0$ temos que $2^0 > 0$ que é verdadeiro.
2. Admitindo o caso $n = k$, ou seja, que $2^k > k$, vamos verificar o que ocorre quando $n = k + 1$:

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 = \underbrace{2^k}_{>k} + \underbrace{2^k}_{\geq 1} > k + 1 \Rightarrow 2^{k+1} > k + 1.$$

Logo, por indução, a propriedade fica demonstrada.

Observação

Note que utilizamos duas comparações diferentes para a potência 2^k. Primeiramente, utilizamos a *hipótese de indução* $2^k > k$. Depois, utilizamos que $2^k \geq 1$ se $k \geq 0$.

Exercício 6

Mostre que $(1+a)^n \geq 1+na$, para todo n natural e todo $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$.

1. Caso inicial: para $n = 0$ temos que $(1+a)^0 \geq 1+0 \Rightarrow 1 \geq 1$, que é verdadeiro.
2. Admitindo o caso $n = k$, ou seja, que $(1+a)^k \geq 1+ka$, vamos verificar o que ocorre quando $n = k+1$:
   $(1+a)^{k+1} = \underbrace{(1+a)^k}_{\geq 1+ka} \cdot (1+a) \geq (1+ka)(1+a) =$
   $(1+ka+a+\underbrace{ka^2}_{\geq 0}) \geq 1+ka+a+0 = 1+(k+1)a.$

Logo, por indução, a propriedade fica demonstrada.

Observação

Note que o valor $a \in \mathbb{R}$ é considerado um valor fixo. A indução é feita apenas com $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 7

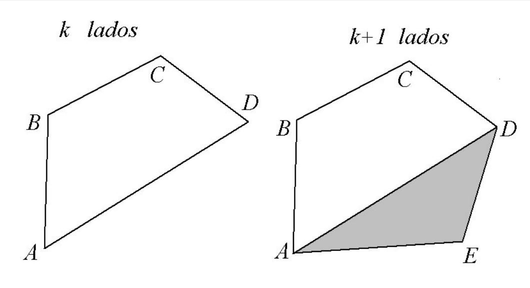
Demonstrações por indução ocorrem em todas as áreas da Matemática. Neste exemplo, demonstramos uma conhecida propriedade da Geometria.

Mostre que a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é $S_n = (n-2) \cdot 180^\circ$.

Solução

1. Caso inicial: para $n = 3$ temos que $S_3 = (3-2) \cdot 180^\circ = 180^\circ$ o que é verdadeiro pois a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°. Note que o caso inicial é $n = 3$ porque é a quantidade mínima de lados de um polígono convexo.
2. Supondo verdadeiro o caso $n = k$, ou seja, que $S_k = (k-2) \cdot 180^\circ$, vamos verificar o que ocorre quando $n = k + 1$.

Exercício 7



Quando passamos de um polígono com k lados para um polígono com $k+1$ lados, é como se acrescentássemos mais um triângulo (*veja figura acima*). Assim, $S_{k+1} = S_k + 180°$, ou seja, $S_{k+1} = (k-2) \cdot 180° + 180° = (k-2+1) \cdot 180° = (k-1) \cdot 180°$ e esse resultado obtido corresponde a S_n quando substituímos n por $k+1$. Logo, por indução, a fórmula da soma das medidas dos ângulos internos fica demonstrada.