Exercícios Resolvidos sobre Combinatória

Lenimar N. Andrade

UFPB

7 de maio de 2008

Resumo

Princípio Fundamental da Contagem

Se um acontecimento é composto de duas etapas sucessivas tais que

- a 1^a etapa pode ocorrer de m maneiras,
- a 2^a etapa pode ocorrer de n maneiras,

então, o total de possibilidades de ocorrência do evento é $m \cdot n$.

O *Princípio Fundamental da Contagem* pode ser generalizado para qualquer quantidade de etapas.

Fatorial

O *fatorial* de um número natural n, denotado por $n!$, é definido por

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Além disso, definimos $0! = 1$.

Resumo

Combinações

Se A for um conjunto com n elementos, então os subconjuntos de A que têm p elementos são chamados *combinações* de n elementos tomados p a p e são denotadas por $C_{n,p}$ ou por $\binom{n}{p}$.

Como calcular

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Como uma combinação é um subconjunto, **a ordem dos elementos não é importante**.

Resumo

Arranjos

Se A for um conjunto com n elementos, então as p-uplas **ordenadas** $(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ de A são chamados *arranjos* de n elementos tomados p a p e são denotadas por $A_{n,p}$.

Como calcular

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-p+1)}_{p \text{ fatores}}$$

Em um arranjo, **a ordem dos elementos é importante**.

Resumo

Permutações sem repetições

Se A for um conjunto com n elementos distintos, então as n-uplas **ordenadas** $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ de A são chamadas *permutações* dos n elementos de A, denotadas por P_n.

Permutações são casos particulares de arranjos: $P_n = A_{n,n} = n!$.

Permutações com repetições

Se o conjunto A possuir $r_1, r_2, \cdots, r_k$ elementos repetidos, então o número de permutações é dado por

$$P_n^{r_1, r_2, \cdots, r_k} = \frac{n!}{r_1!\, r_2! \cdots r_k!}$$

Princípio Fundamental da Contagem

Exercício 1

Ligando as cidades A e B há 5 linhas de ônibus, e ligando as cidades B e C há 8 linhas. Não há linha direta entre A e C. Qual o número de maneiras de se ir de ônibus da cidade A até a cidade C?

Solução

Temos dois eventos distintos:

- 1^o evento: ir de A para B $\longrightarrow$ 5 possibilidades
- 2^o evento: ir de B para C $\longrightarrow$ 8 possibilidades

Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos um total de $5 \cdot 8 = 40$ modos de se ir de A para C.

Exercício 2

Quantas placas de automóvel têm três letras distintas (de um alfabeto com 26 letras), iniciam com a letra M e têm 4 algarismos?

Solução

Existem 25 opções para a segunda letra, 24 opções para a terceira e 10 opções para cada algarismo. Logo, o total de placas é
$25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 6.000.000 =$ seis milhões.

Exercício 3

De quantos modos diferentes uma empresa contendo 20 funcionários pode eleger um presidente, um vice-presidente e um tesoureiro (supondo-se que ninguém seja eleito para mais de um cargo) ?

Solução

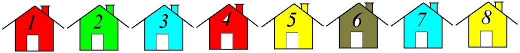
- O presidente pode ser escolhido de 20 modos diferentes;
- O vice-presidente, de 19 modos diferentes;
- O tesoureiro de 18 modos diferentes;

Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, existem

$$20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$$

maneiras diferentes da empresa eleger seus funcionários.

Exercício 4



De quantos modos podemos pintar 8 casas enfileiradas, usando 5 cores para pintá-las, sendo que cada casa é pintada com uma única cor e duas casas vizinhas são pintadas com cores diferentes?

Solução

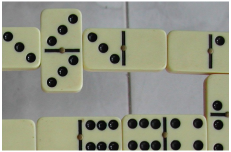
- A primeira casa pode ser pintada com qualquer uma das 5 cores;
- Para a segunda casa, podemos escolher uma entre 4 cores possíveis, pois não podemos repetir a cor da primeira;
- A partir da terceira casa, temos 4 possibilidades de escolha da cor pois só não podemos repetir a cor da casa anterior.

Logo, o número total de modos de pintar as casas é

$$5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 81.920.$$

Combinações

Exercício 5



Quantas peças tem um dominó comum, formado por peças com pares de números de 0 a 6?

Solução

- Existem 7 peças com números repetidos: $(0,0),(1,1),\cdots,(6,6)$;
- Existem $C_{7,2} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21$ peças com números distintos;

Logo, o total de peças é de $7+21=28$ peças.

Exercício 6

Quantas peças seriam necessárias para se construir um dominó "diferente", formado por peças com pares de números de 0 a 10?

Solução

- Os pares números repetidos formam 11 peças: $(0,0), (1,1), \cdots, (10,10)$;
- Para as peças com números distintos, são necessárias $C_{10,2} = \frac{10!}{8!2!} = \frac{10\cdot 9}{2} = 45$ peças;

Logo, o total de peças é de $11 + 45 = 56$ peças.

Observação

Em geral, um dominó com peças com números de 0 a n teria $n + 1 + C_{n+1,2} = n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ peças.

Exercício 7

Um colégio tem 18 professores, entre os quais 5 lecionam Matemática. Qual o número de comissões com 4 professores que podem ser formadas de tal forma que em cada comissão tenha no mínimo um professor de Matemática?

Solução 1

É possível formar um total de $C_{18,4}$ comissões que contenham ou não professor de Matemática. Com os 13 professores que não lecionam Matemática, é possível formar um total de $C_{13,4}$ comissões. Portanto, o número de comissões que contêm algum professor de Matemática é igual a $C_{18,4} - C_{13,4} = 2345$.

Observação

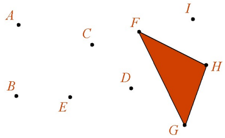
Como não há uma ordem definida entre os professores de uma comissão, temos um caso típico do uso de *combinações*.

Solução 2

- Número de comissões com 1 professor de Matemática e 3 outros professores $= C_{5,1} \cdot C_{13,3}$
- Número de comissões com 2 professor de Matemática e 2 outros professores $= C_{5,2} \cdot C_{13,2}$
- Número de comissões com 3 professor de Matemática e 1 outros professores $= C_{5,3} \cdot C_{13,1}$
- Número de comissões com 4 professor de Matemática e nenhum outro professor $= C_{5,4} \cdot C_{13,0}$

Logo, o número total de comissões é
$C_{5,1} \cdot C_{13,3} + C_{5,2} \cdot C_{13,2} + C_{5,3} \cdot C_{13,1} + C_{5,4} \cdot C_{13,0} = 2345.$

Exercício 8



Em um plano, temos 9 pontos entre os quais não existem 3 deles colineares (em uma mesma reta). Quantos triângulos é possível formar ligando-se 3 desses pontos?

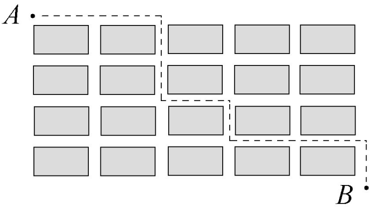
Solução

A ordem com que os pontos são escolhidos não é importante. Portanto, a quantidade de triângulos que se pode formar é

$$C_{9,3} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 84.$$

Permutações

Exercício 9



Um bairro de uma cidade é formado por 20 quarteirões de formatos retangulares que formam 5 ruas horizontais e 6 ruas verticais, conforme a figura acima. De quantas formas é possível ir do ponto A até o ponto B, seguindo o caminho mais curto, ou seja, caminhando sempre para a direita ou para baixo?

Solução

Vamos denotar por O toda vez que um quarteirão do bairro for percorrido para o oeste (para a direita) e por S toda vez que um quarteirão for percorrido para o sul (para baixo). Por exemplo, o trajeto mostrado na figura anterior pode ser denotado por $(O, O, S, S, O, S, O, O, S)$. Note que em qualquer trajeto desse tipo ("menor caminho") teremos sempre 5 deslocamentos para o oeste, mais 4 deslocamentos para o sul. Logo, o total de deslocamentos será sempre igual a $5 + 4 = 9$ deslocamentos. Para calcularmos o número de trajetórias, devemos calcular o número de permutações com 9 elementos com repetições de cinco O e quatro S. Portanto, o número de trajetos é

$$\frac{9!}{5!\,4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126.$$

Exercício 10

Com as vogais A, E, I, O, e as consoantes B, M, R, S quantas palavras de 8 letras é possível formar, sem repetição de letras, de modo que não fiquem juntas duas vogais e nem duas consoantes?

Solução

Devemos considerar dois casos:

- A palavra inicia com vogal, por exemplo ABESOMIR. Neste caso, é possível permutar as vogais de 4! modos e permutar as consoantes de 4! modos; logo, há $(4!)^2$ palavras nesse formato;
- A palavra inicia com consoante, como por exemplo BIMASERO. Neste caso, também existem $(4!)^2$ palavras nesse formato.

Logo, há um total de $2 \cdot (4!)^2 = 1152$ palavras com esse formato.

Exercício 11

Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, de quantas formas é possível permutá-los de modo que os números ímpares fiquem em ordem crescente e os pares fiquem em ordem decrescente? (*Por exemplo, 1643572 seria um dos números obtidos*)

Solução

O total de números obtidos é a quantidade de permutações com repetições de IIIIPPP onde I representa um algarismo ímpar, e P um par. Cada permutação, dá origem a um número. Por exemplo, IIPPIIP dá origem a 1364572. Assim, o total de números é $\frac{7!}{4!3!} = 35$.

Exercício 12

Em uma prateleira de uma estante encontram-se 5 livros de Matemática, 6 livros de Informática, 4 livros de História e 7 livros de Português. De quantos modos podemos arrumar esses 22 livros na prateleira de modo que livros de uma mesma matéria não fiquem separados?

Solução

Mantendo-se os livros agrupados pelas 4 matérias, temos um total de 4! modos de permutar as posições dessas matérias na prateleira. Como é possível permutar os livros de uma mesma matéria, temos que o número total de disposições possíveis é

$$\underbrace{4!}_{\text{matérias}} \cdot \underbrace{5!}_{\text{Matemática}} \cdot \underbrace{6!}_{\text{Informática}} \cdot \underbrace{4!}_{\text{História}} \cdot \underbrace{7!}_{\text{Português}} = 250.822.656.000$$

Arranjos

Exercício 13

Qual a quantidade de números com 3 algarismos distintos?

Solução

- O 1º algarismo pode ser escolhido de 9 maneiras (não pode ser 0);
- Para o 2º algarismo tem 9 opções (não pode ser igual ao anterior);
- O 3º algarismo pode ser escolhido de 8 maneiras (não pode ser igual aos 2 anteriores);

Logo, o total de números com 3 algarismos distintos é $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Outra maneira de calcular

$$\underbrace{A_{10,3}}_{\text{total incluindo os que iniciam com 0}} - \underbrace{A_{9,2}}_{\text{números que iniciam com 0}} = 720 - 72 = 648$$

Exercício 14

Qual a quantidade de números com 3 algarismos, com ou sem repetição?

Solução

- O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 maneiras (não pode ser 0);
- Os outros algarismos podem ser escolhidos de 10 maneiras;
- Logo, o total de números com 3 algarismos é $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

Observação

Os números com 3 algarismos vão de 100 a 999, logo, o total deles também pode ser calculado assim: $999 - 100 + 1 = 900$.

Exercício 15

Qual a quantidade de números com 3 algarismos que têm pelo menos um algarismo repetido?

Solução

- A quantidade total de números com 3 algarismos, com ou sem repetição, é 900 (veja exercício anterior);
- O total de números com 3 algarismos distintos é 648 (veja, também, exercício anterior);

Logo, o total de números com 3 algarismos distintos que tem algum repetido é $900 - 648 = 252$.