UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Segunda lista de Exercícios - Análise Funcional, período 2009.2.
Professor: João Marcos do Ó

Exercício 1. Use o Lema de Zorn para mostrar que todo espaço vetorial possui uma base de Hamel.

Exercício 2. Mostre que em todo espaço vetorial de dimensão infinita existe um funcional linear não limitado.

Exercício 3. Seja E um espaçco de dimensão finita e F um subespaço próprio de E. Dado um funcional linear $f : F \to \mathbb{R}$, mostre que existe uma extensão de f para E (sem usar o Teorema de Hahn-Banach).

Exercício 4. Dê um exemplo para ilustrar que a extensão obtida no Teorema de Hahn-Banach pode não ser única.

Exercício 5. Prove que $x \neq y$ em um espaço normado X, se, e somente se, existe $f \in X'$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Exercício 6. Seja E um espaço normado e M um subespaço de E. Fixado $x_o \in E$ tal que $d = \operatorname{dist}(x_o, M) > 0$, mostre que existe $f \in E'$ tal que:

$$f(x_o) = d, \quad f(M) = 0, \quad \|f\| = 1.$$

Exercício 7. Seja E um espaço de Banach e M um subespaço de E. Dada $T \in \mathcal{L}(M, l_\infty)$, use o Teorema de Hahn-Banach para mostrar que existe uma extensão $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(E, l_\infty)$ tal que $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

Exercício 8. Sejam E, F espaços normados e $T \in \mathcal{L}(G, F)$ onde G é um subespaço de E. Se $\dim F < \infty$ mostre que existe uma extensão $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(E, F)$

Exercício 9. (Teorema de Liouville) Seja X um espaço vetorial normado e $x : \mathbb{C} \to X$ analítica e limitada . Mostre que x é constante.

Exercício 10. Mostre que todo subespaço M de dimensão finita admite um suplementar topológico.

Exercício 11. Mostre que todo subespaço fechado M de co-dimensão finita admite um suplementar topológico.

Exercício 12. Seja E um espaço normado e M um subespaço de E. Mostre que $(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}$.

Exercício 13. Seja E um espaço vetorial normado. Dizemos que uma sequência (x_n) converge fraco para x e denotamos por $x_n \rightharpoonup x$ quando $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in E'$.

1. Mostre a unicidade do limite fraco.
2. Mostre que se $x_n \to x$ (converge forte) então $x_n \rightharpoonup x$.
3. A recíproca é verdadeira?

Exercício 14. Suponha que $\dim E < \infty$. Mostre que uma sequencia (x_n) converge fraco, se e somente se, converge na topologia da norma.

Exercício 15. Fixado $1 < p < \infty$ mostre que todo elemento $f \in (l^p)'$ é da forma:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k,$$

onde $a = (a_k) \in l^{p'}$. Em particular, $a_k \to 0$. Use isto para concluir que a sequência $e_n \rightharpoonup 0$, entretanto $e_n \not\to 0$.

Exercício 16. Seja H um espaço de Hilbert e M um subespaço fechado de H. Se $f \in H'$, mostre que existe uma única extensão para H com a mesma norma de f.

Exercício 17. Um espaço normado é dito uniformente convexo se $\forall \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$x, y \in E,\ \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1 \text{ e } \|x - y\| > \epsilon \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta.$$

Mostre que todo espaço de Hilbert é uniformente convexo. Dê exêmplo de um espaço normado que não seja uniformente convexo.

Exercício 18. Mostre que todo espaço de Hilbet é reflexivo.

Exercício 19. Mostre que l^p é um espaço de Hilbert se, e somente se, $p = 2$.

Exercício 20. Todo espaço vetorial normado e separável é isometricamente isomorfo a um subespaço de l_∞. (sugestão: considere um subconjunto denso $D = \{x_n\}$ e enumerável e use Hahn-Banach para obter uma sequencia $\|f_n\| = 1$ tal que $f_n(x_n) = \|x_n\|$ e defina $T : E \to l_\infty$, pondo $T(x) = (f_n(x))_n$).

Exercício 21. Seja E um espaço vetorial real e f, g funcionais lineares em E. Mostre que $f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$ se, e somente se, existe $\lambda > 0$ tal que $f = \lambda g$. (sugestão: defina

$$h : E \to \mathbb{R}^2$$

pondo $h(x) = (f(x), g(x))$. Observe que o ponto $a = (1, 0) \notin Im(h)$ e use o Teorema de Hahn-Banach geométrico.

Exercício 22. Use a mesma idéia do exercício anterior para mostrar que se $f, f_1, ...f_n$ em E^* são tais que

$$[f_i(x) = 0, i = 1, ..., n \Rightarrow f(x) = 0]$$

então existem $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que $f = \Sigma_{i=1}^n \lambda_i f_i$.

Exercício 23. Seja E um espaço vetorial normado e M um subespaço vetorial fechado. Seja $x_o \in E$ satisfazendo a seguinte condição: Para cada $\varphi \in E'$ tal que $\varphi\,|_M \equiv 0$ implique que $\varphi(x_o) = 0$. Mostre que $x_o \in M$.

Exercício 24. Dê um exemplo para mostrar que a compacidade é necessaria na segunda forma geometrica do teorema de Hahn-Banach.

Exercício 25. Seja E um espaço normado e M um subespaço de E. Mostre que $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$.

Exercício 26. Prove que se E é um espaço de Banach que possui um subconjunto infinito linearmente independente então E não possui uma base Hamel enumeráavel (sugestão: use o Lema de Baire).