1. Integrais Duplas

1.1 Introdução

Neste capítulo vamos estudar integrais duplas, começamos definindo estas integrais sobre retângulos para logo generalizar a definição a domínios mais gerais. A seguir, fazemos algumas mudanças de coordenadas que podem nos ajudar no cálculo das integrais duplas e, por último, veremos algumas aplicações.

1.2 Integrais Duplas sobre Retângulos

Consideremos uma função limitada $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$, onde $\mathcal{R} := [a,b]\times[c,d]$ é um retângulo em $\mathbb{R}^2$, ou seja,

$$\mathcal{R} = \Big\{(x.y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ c \le y \le d\Big\}.$$

Sejam $\mathcal{P}_1 := \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ e $\mathcal{P}_2 := \{y_0, y_1, ..., y_n\}$ partições dos intervalos $[a,b]$ e $[c,d]$, respectivamente, tais que $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b,\ c = y_0 < y_1 < ... < y_n = d$,

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} \qquad \text{e} \qquad y_{j+1} - y_j = \frac{d-c}{n}.$$

Notemos que $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ é uma partição do retângulo $\mathcal{R}$ e os n^2 subretângulos da forma

$$\mathcal{R}_{ij} := [x_i,\, x_{i+1}] \times [y_j,\, y_{j+1}]$$

com $i, j \in \{0, ..., n-1\}$, cobrem $\mathcal{R}$.

Sejam $c_{ij} \in \mathcal{R}_{ij},\ i, j = 0, 1, ..., n-1$, um ponto arbitrário e consideremos a soma

$$S_n := \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(c_{ij})\Delta x \Delta y, \qquad \text{onde,} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n} \ \text{ e } \ \Delta y = \frac{d-c}{n}.$$

S_n diz-se *Soma de Riemann de f sobre $\mathcal{R}$.*

Definição 1.1 Dizemos que $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ é integrável sobre $\mathcal{R}$ se, e somente se, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ existe, qualquer que seja a escolha dos $c_{ij} \in \mathcal{R}_{ij}$ e quaisquer que sejam as partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$.

Neste caso, denotamos o $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ por: $\int_{\mathcal{R}} f(x,y)dxdy$ ou $\int_{\mathcal{R}} f dA$ e chamamos de *integral dupla de f sobre $\mathcal{R}$.*

Teorema 1.2 Se $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ é uma função limitada e contínua, então f é integrável em $\mathcal{R}$.

Exemplo 1.3 Calculemos, usando as somas de Riemann, a integral dupla da função $f(x,y) = x^2y$ sobre o retângulo $\mathcal{R} = [0,1]\times[0,1]$.
Consideremos a partição $\mathcal{P} = \{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\}$ de $[0,1]$, a partição $\mathcal{P}\times\mathcal{P}$ de $\mathcal{R}$ e tomemos $c_{ij} = (\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$. Nas notações anteriores temos:

$$a = c = 0, \quad b = d = 1, \quad x_i = \frac{i}{n}, \quad y_j = \frac{j}{n}, \quad \Delta x = \Delta y = \frac{1}{n}.$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f(c_{ij})\Delta x\Delta y = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f(x_i, y_j)\Delta x\Delta y \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} (x_i)^2 \cdot y_j \cdot \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{j}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^5 \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} j\right) i^2 = \frac{1}{n^5}\sum_{i=0}^{n}\frac{n(n+1)}{2} i^2 = \frac{1}{n^5}\frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=0}^{n} i^2 \\
&= \frac{n+1}{2n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)^2(2n+1)}{12n^3}.
\end{aligned}$$

Assim, $\int_{\mathcal{R}} f dA = \int_{\mathcal{R}} f(x,y)dxdy = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2(2n+1)}{12n^3} = \frac{1}{6}$.

$$\text{Logo,} \quad \int_{\mathcal{R}} x^2y\,dxdy = \frac{1}{6}$$

Usamos aqui dois fatos que supomos conhecidos, são estes:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Neste exemplo vemos que o cálculo de integrais duplas usando as somas de Riemann pode não ser uma tarefa fácil. O teorema de Fubini [a], que veremos logo adiante, simplificará estes cálculos.

[a] Guido Fubini (19 de janeiro de 1879 Veneza-Itália - 6 de junho de 1943 Nova Iorque-EUA)

1.3 Significado Geométrico da Integral Dupla

Seja $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, note que sendo $\mathcal{R}$ compacto, (fechado e limitado), f é uma função limitada. Suponhamos que, $\forall (x,y) \in \mathcal{R}$, $f(x,y) \geq 0$ e seja $W \subset \mathbb{R}^3$ o sólido definido por:

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathcal{R},\ 0 \leq z \leq f(x,y)\right\}$$

W é fechado, limitado superiormente pelo gráfico de f, $(z = f(x,y))$, inferiormente pelo retângulo $\mathcal{R}$ e lateralmente pelos planos $x = a$, $x = b$, $y = c$ e $y = d$.

Se $vol(W)$ denota o volume de W, então

$$\boxed{vol(W) = \int_{\mathcal{R}} f\,dA = \int_{\mathcal{R}} f(x,y)dxdy}$$

De fato, escolhendo c_{ij} como o ponto de $\mathcal{R}_{ij}$ onde f atinge seu valor máximo sobre $\mathcal{R}_{ij}$ (este ponto existe já que $\mathcal{R}_{ij}$ é compacto e f é contínua), então $f(c_{ij})\Delta x\Delta y$ é o volume do paralelepípedo de base $\mathcal{R}_{ij}$ e altura $f(c_{ij})$.

$S_n = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} f(c_{ij})\Delta x\Delta y$ é o volume de um solido circunscrito a W.

Analogamente, se $\bar{c}_{ij} \in \mathcal{R}_{ij}$ é o ponto onde f atinge seu mínimo em $\mathcal{R}_{ij}$, então $f(\bar{c}_{ij})\Delta x\Delta y$ é o volume do paralelepípedo de base $\mathcal{R}_{ij}$ e altura $f(\bar{c}_{ij})$.

$s_n = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} f(\bar{c}_{ij})\Delta x\Delta y$ é o volume de um solido inscrito em W.

É claro que $s_n \leq vol(W) \leq S_n$. Além disso, como f é integrável sobre $\mathcal{R}$, os limites das somas de Riemann s_n e S_n independem das escolhas de c_{ij} e $\bar{c}_{ij}$ e temos

$$\int_{\mathcal{R}} f\,dA = \lim_{n\to\infty} s_n \leq vol(W) \leq \lim_{n\to\infty} s_n = \int_{\mathcal{R}} f\,dA.$$

Assim, $\boxed{vol(W) = \int_{\mathcal{R}} f\,dA.}$

Exemplo 1.4 Vimos no exemplo 1.3 que $\int_{\mathcal{R}} x^2y = \frac{1}{6}$, onde $\mathcal{R} = [0,1]\times[0,1]$. Se W é o solido limitado superiormente pelo gráfico de $f(x,y) = x^2y$, inferiormente pelo quadrado $\mathcal{R} = [0,1]\times[0,1]$ e lateralmente pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$, então $vol(W) = \frac{1}{6}$ unidades de volume. (Observe que $f(x,y) = x^2y \geq 0\ \forall (x,y) \in \mathcal{R}$).

1.4 Propriedades da Integral Dupla

Sejam $f, g : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ funções definidas sobre um retângulo $\mathcal{R}$ e sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. As seguintes propriedades são válidas

(1) Linearidade: Se as funções f e g são integráveis sobre $\mathcal{R}$, então a função $\alpha f + \beta g$ é integrável sobre $\mathcal{R}$ e

$$\int_{\mathcal{R}} (\alpha f + \beta g)dA = \alpha\int_{\mathcal{R}} f\,dA + \beta\int_{\mathcal{R}} g\,dA.$$

(2) Se f e g são integráveis sobre $\mathcal{R}$ e $\forall(x,y)\in\mathcal{R},\ f(x,y)\le g(x,y)$, então

$$\int_{\mathcal{R}} f\,dA \le \int_{\mathcal{R}} g\,dA.$$

(3) Se $\mathcal{R}$ é dividido em k subretângulos $\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2,\ldots,\mathcal{R}_k$ tais que $R_i\cap R_j\subset \partial R_i\cap\partial R_j$ e f é integrável sobre cada $\mathcal{R}_j$, $j=1,2,\ldots,k$; então f é integrável sobre $\mathcal{R}$ e

$$\int_{\mathcal{R}} f\,dA = \sum_{j=1}^{k}\int_{\mathcal{R}_j} f\,dA.$$

Definição 1.5 (Integrais Iteradas) Para uma função $f:\mathcal{R}\to\mathbb{R}$ contínua e limitada definida num retângulo $\mathcal{R}=[a,b]\times[c,d]$, uma integral iterada de f sobre $\mathcal{R}$ é uma integral do tipo

$$\int_c^d\left\{\int_a^b f(x,y)dx\right\}dy \quad \text{ou} \quad \int_a^b\left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}dx.$$

Para calcular, por exemplo, a integral $\int_c^d\left\{\int_a^b f(x,y)dx\right\}dy$, calculamos a integral $\int_a^b f(x,y)dx$ como a integral de uma função da variável x, com y fixo. O resultado será uma função na variável y que agora integramos nessa varável nos limites de integração c e d.

Analogamente calculamos $\int_a^b\left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}dx$.

Exemplo 1.6 Calcular $\int_0^1\left\{\int_{-1}^2 x^3y^2dy\right\}dx$.

Solução:

$$\int_{-1}^2 x^3y^2dy = \frac{1}{3}x^3y^3\Big|_{-1}^2 = \frac{x^3}{3}\left(2^3-(-1)^3\right) = \frac{x^3}{3}9 = 3x^3.$$

$$\int_0^1\left\{\int_{-1}^2 x^3y^2dy\right\}dx = \int_0^1 3x^3dx = \frac{3}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

Exemplo 1.7 Calcular $\int_0^1\left\{\int_1^2 ye^{xy}dx\right\}dy$

Solução:

$$\int_1^2 ye^{xy}dx = e^{xy}\Big|_{x=1}^{x=2} = e^{2y}-e^y.$$

$$\int_0^1\left\{\int_1^2 ye^{xy}dx\right\}dy = \int_0^1\left(e^{2y}-e^y\right)dy = \left(\frac{1}{2}e^{2y}-e^y\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e^2-e-\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{1}{2}e^2-e+\frac{1}{2}.$$

O teorema a seguir relaciona as integrais duplas com as integrais iteradas.

Teorema 1.8 **(Teorema de Fubini[a])** Seja $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no retângulo $\mathcal{R} = [a,b][c,d]$. Então,

$$\int_{\mathcal{R}} f\,dA = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)dx \right\} dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)dy \right\} dx.$$

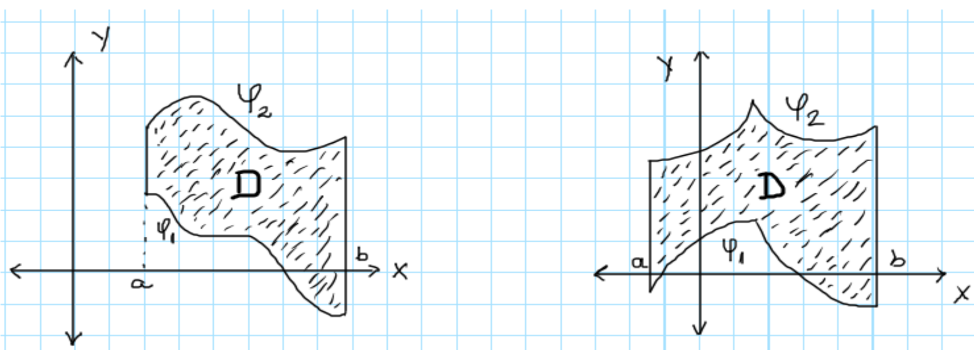
[a]Guido Fubini, matemático italiano (19/01/1879 - 06/06/1943). Doutorou-se em 1900 com uma tese sobre paralelismo de Clifford em espaços elípticos.

1.5 Integração Dupla em Regiões mais Gerais

Consideraremos dois tipos especiais de subconjuntos do plano que utilizaremos para estender o conceito de integral dupla sobre retângulos a regiões mais gerais.
Tipo 1: Dizemos que uma região $D \subset \mathbb{R}^2$ é do tipo 1 se, e somente se, D pode ser descrita como:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b;\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

onde φ_i, $i = 1,2$ são funções contínuas tais que, para todo $x \in [a,b]$, $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$

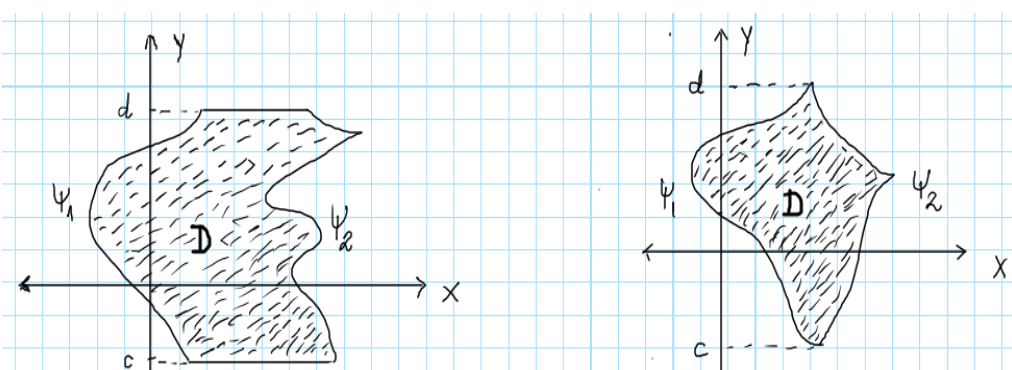


Regiões do Tipo 1

Tipo 2: D é uma região do tipo 2 se, e somente se, ela pode ser descrita como:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y);\ c \le y \le d\}$$

onde ψ_1, $\psi_2 : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e, para todo $y \in [c,d]$, $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$.



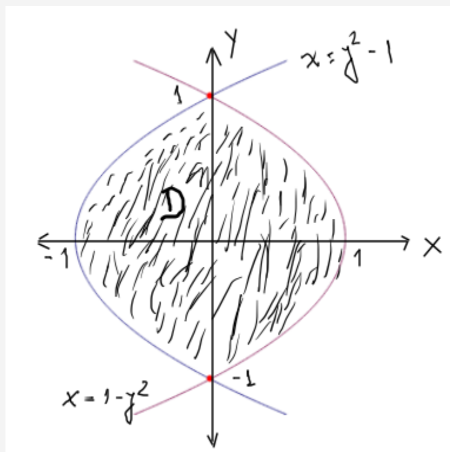
Regiões do Tipo 2

Definição 1.9 Regiões dos tipos 1 ou 2 são chamadas de regiões elementares.

Note que regiões elementares são fechadas e limitadas.

Exemplo 1.10 Seja D a região do plano limitada pelas curvas $y^2 - x = 1$ e $y^2 + x = 1$. Podemos descrever D como:

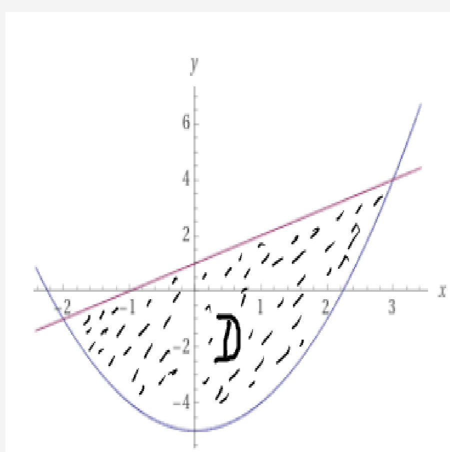
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1;\ y^2 - 1 \leq x \leq y^2 + 1\}$$



D é uma região do tipo 2.

Exemplo 1.11 A região D limitada pelas curvas $y = x + 1$ e $y = x^2 - 5$ pode ser descrita como:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 3;\ x^2 - 5 \leq y \leq x + 1\}$$



D é uma região do tipo 1.

Agora vamos estender a definição de integral dupla a regiões elementares.

Sejam D uma região elementar, $\mathcal{R}$ um retângulo que contém D $(D \subset \mathcal{R})$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada.

Defina:

$$\widetilde{f} : \mathcal{R} \to \mathbb{R}, \quad \widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se} \quad (x,y) \in D \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) \in \mathcal{R} \setminus D \end{cases}$$

$\widetilde{f}$ é limitada e contínua, salvo talvez, nos pontos de ∂D.

Se ∂D é uma união finita de curvas, que podemos pensar como gráfico de funções contínuas, então $\widetilde{f}$ é uma função integrável sobre $\mathcal{R}$.

Definição 1.12 Seja D uma região elementar, dizemos que a função $f : D \to \mathbb{R}$ é integrável sobre D se a função $\widetilde{f}$ é integrável sobre $\mathcal{R}$. Neste caso definimos:

$$\int_D f\,da = \int_{\mathcal{R}} \widetilde{f}\,dA.$$

Note que $\int_D f\,dA$ não depende da escolha do retângulo $\mathcal{R}$ que usamos na sua definição pois, se $\mathcal{R}_1$ é outro retângulo que contém D e

$$\widetilde{f_1} : \mathcal{R} \to \mathbb{R}, \quad \widetilde{f_1}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & se \quad (x,y) \in D \\ 0 & se \quad (x,y) \in \mathcal{R}_1 \setminus D \end{cases}$$

é definida como antes, então $\int_{\mathcal{R}} \widetilde{f}\,dA = \int_{\mathcal{R}_1} \widetilde{f_1}\,dA$, já que $\widetilde{f} = \widetilde{f_1}$ onde $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_1$ diferem.

Teorema 1.13 Sejam D uma região elementar e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função integrável sobre D, então

(a) Se $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b;\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ é uma região do tipo 1.

$$\int_D f\,dA = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right\} dx.$$

(b) Se $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y);\ c \leq yd\}$ é uma região do tipo 2.

$$\int_D f\,dA = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right\} dy.$$

Corolário 1.14 Se $f \equiv 1$, ou seja, se $f(x,y) = 1$, para todos $(x,y) \in D$, então

$$\int_D f\,dA = \int_D dxdy = \text{área}(D)$$

Demonstração: Suponhamos, por exemplo, que D é do tipo 1, ou seja,

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b;\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$, então

$$\int_D f\,dA = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\,dx = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\,dx = \text{área}(D.)$$

□

Corolário 1.15 Se, $\forall (x,y) \in D,\ f(x,y) \ge 0$, então $\int_D f\,dA = \text{vol}(W)$, onde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D;\ 0 \le z \le f(x,y)\}$ é o cilindro sobre a região D limitado por cima pelo gráfico de f.

Exemplo 1.16 Calcular $\int_D \sqrt{1-y^2}dxdy$, onde D é a região limitada por $x^2 + y^2 = 1$, no primeiro quadrante.
Solução: Vamos considerar D do tipo 2. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}\right\}$

$$\int_D \sqrt{1-y^2}dxdy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}dxdy = \int_0^1 (1-y^2)dy = \frac{2}{3}.$$

Exemplo 1.17 Determine o volume do solido W limitado por: $z = 2x+1$, $x = y^2$ e $x - y = 2$.
Solução: $\text{vol}(W) = \int_D (2x+1)dA$, onde $D : \begin{cases} -1 \le y \le 2 \\ y^2 \le x \le y+2 \end{cases}$ Assim,
$\text{vol}(W) = \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} (2x+1)dxdy = \int_{-1}^2 (x^2+x)\Big|_{y^2}^{y+2} dy = \int_{-1}^2 (5y+6-y^4)dy = \frac{189}{10}$.
$\therefore \quad \text{vol}(W) = \frac{189}{10}$ unidades de volume.

Exemplo 1.18 Calcule a área da região D, limitada pelas curvas $y = 4x - x^2$ e $y = x$.
Solução: $D : \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ x \le y \le 4x - x + 2 \end{cases}$

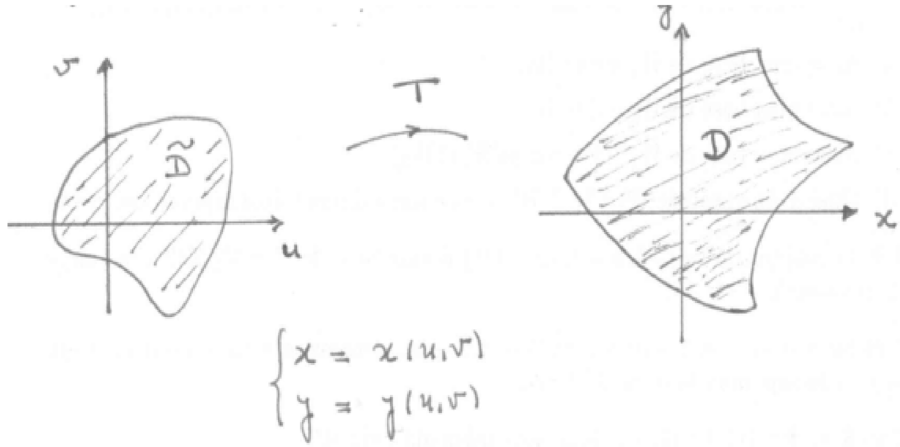
$$\text{área}(d) = \int_D dA = \int_0^3 \int_x^{4x-x^2} dydx = \int_0^3 (3x - x^2)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2}.$$

$\therefore \quad \text{área}(D) = \frac{9}{2}$ unidades de área.

1.6 Mudança de Coordenadas

Definição 1.19 Seja $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ uma região elementar, uma transformação do plano é uma aplicação $T : \widetilde{D} \to \mathbb{R}^2$, $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ onde $x, y : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, com derivadas parciais contínuas no retângulo aberto $\mathcal{R}$ tal que $\widetilde{D} \subset \mathcal{R}$.

Notação: Denotemos por D a imagem da transformação T. i.e. $D = T(\widetilde{D})$.



Exemplo 1.20 Seja $T:[0,1]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2, \quad T(r,\theta)=(x(r,\theta),y(r,\theta))$.

Onde $\begin{cases} x &= x(r,\theta) &= r\cos(\theta) \\ y &= y(r,\theta) &= r\sin(\theta) \end{cases}$

A imagem de $\widetilde{D}=[0.1]\times[0,2\pi]$ por T é o círculo $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$. Assim T transforma o retangulo $[0,1]\times[0,2\pi]$ no círculo $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$.

Definição 1.21 Dizemos que uma transformação $T:\widetilde{D}\to\mathbb{R}^2$ é injetiva em $\widetilde{D}$ se:

$$T(u_1,v_1)=T(u_2,v_2) \implies (u_1,v_1)=(u_2,v_2), \quad \forall\,(u_1,v_1),\,(u_2,v_2)\in\widetilde{D}$$

Equivalentemente, T é injetiva se:

$$(u_1,v_1)\neq(u_2,v_2) \implies T(u_1,v_1)\neq T(u_2,v_2), \quad \forall\,(u_1,v_1),\,(u_2,v_2)\in\widetilde{D}$$

Exemplo 1.22 A transformação T do exemplo 1.20 não é injetiva. De fato,

$$T(1,0)=T(1,2\pi)=(1,0) \quad \text{mas} \quad (1,0)\neq(1,2\pi).$$

A mesma transformação anterior, agora restrita ao retângulo $(0,1]\times[0\pi]$ é injetiva. Ou seja,

$$T:(0,1]\times[0\pi]\to\mathbb{R}^2,\ T(r,\theta)=(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$$

é injetiva.

Definição 1.23 Seja $\widetilde{D} \to \mathbb{R}^2$, $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ uma transformação do plano, com x, y funções de classe C^1 em um aberto que contém $\widetilde{D}$. A matriz

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

é chamada *matriz Jacobiana da Transformação T*.
Notação:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = det(J) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Exemplo 1.24 Considere a transformação T do exemplo 1.20

$$T(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

A matriz Jacobiana é

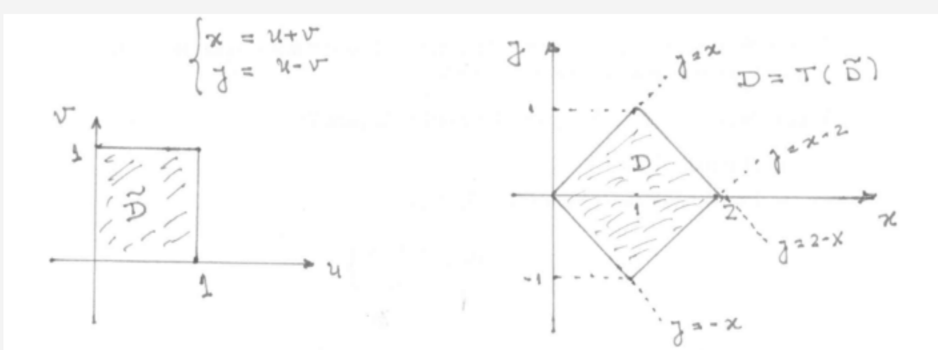
$$J = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad det(J) = \frac{(x,y)}{(r,\theta)} = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r.$$

Uma das importâncias da matriz Jacobiana está no teorema aseguir cuja demonstração, por enquanto, não faremos.

Teorema 1.25 Seja $T : \widetilde{D} \to \mathbb{R}^2$, $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ uma transformação do plano. Se o Jacobiano de T num ponto $(u_0, v_0) \in \widetilde{D}$, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0, v_0)$, é diferente de zero, então existe uma vizinhança $V \subset \widetilde{D}$ do ponto (u_0, v_0) tal que a restrição de T à vizinhança V é injetiva.

$$\left(\frac{(x,y)}{(u,v)}(u_0,v_0) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists V \subset \widetilde{D},\ (u_0,v_0) \in V,\ \text{ t.q. } \ T : V \to \mathbb{R}^2 \quad \text{é injetiva} \right).$$

Exemplo 1.26 Seja $T : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $T(u,v) = (u+v, u-v)$.



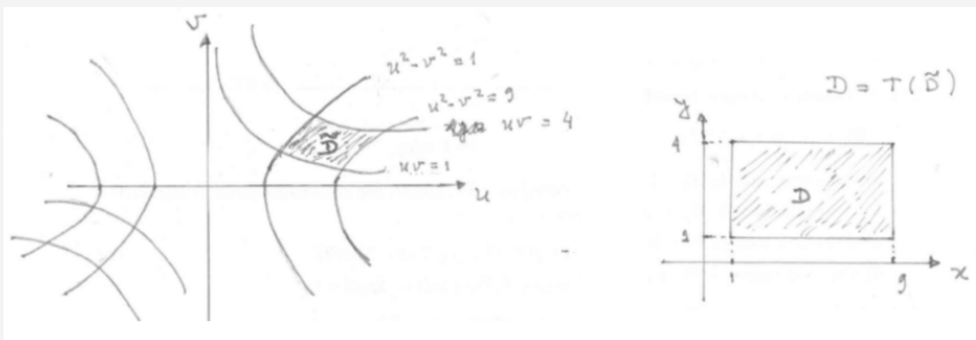
Note que:

$$u = 0 \implies y = -x \quad \text{e} \quad u = 1 \implies y = 2 - x;$$

$$v = 0 \implies y = x \quad \text{e} \quad v = 1 \implies y = x - 2.$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$

Exemplo 1.27 Considere a transformação T definida por $\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = uv \end{cases}$ na região $\widetilde{D}$ limitada pelas curvas $u^2 - v^2 = 1$, $u^2 - v^2 = 9$, $uv = 1$, e $uv = 4$, no primeiro quadrante.



$$u^2 - v^2 = 1 \implies x = 1 \quad \text{e} \quad u^2 - v^2 = 9 \implies x = 9;$$

$$uv = 1 \implies y = 1 \quad \text{e} \quad uv = 4 \implies y = 4.$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = det\begin{pmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{pmatrix} = 2\left(u^2 + v^2\right) \neq 0, \text{ em } \widetilde{D}.$$

Teorema 1.28 **(Mudança de Coordenadas em Integrais Duplas)** Seja $T : \widetilde{D} \to \mathbb{R}^2$ uma transformação injetiva de classe C^1. Seja $D = T(\widetilde{D})$ e suponha que D e $\widetilde{D}$ são regiões elementares do plano $\mathbb{R}^2$. Então para toda função integrável $f : D \to \mathbb{R}$ temos:

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_{\widetilde{D}} f(u,v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

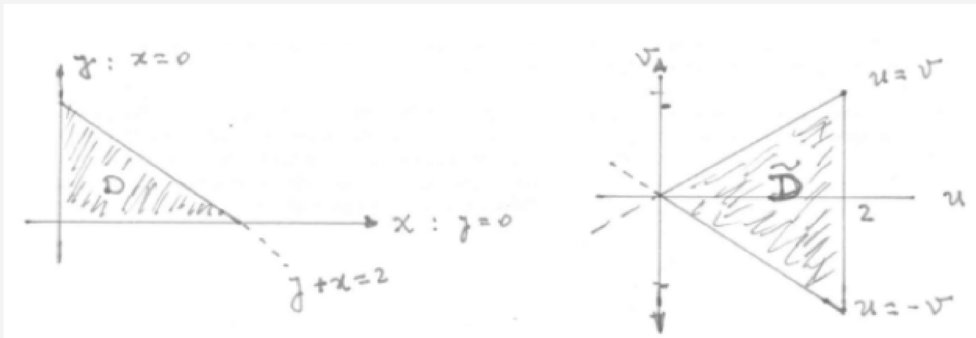
onde $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ é o valor absoluto do determinante jacobiano e $f(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$.

Em particular temos que:

$$área(D) = \int_D dxdy = \int_{\widetilde{D}} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Exemplo 1.29 Calcular $\int_D e^{\frac{y-x}{x+y}} dxdy$, onde D é a região limitada pela reta $y + x = 2$ e pelos eixos coordenados.

Solução: Considere a mudança de coordenadas $\begin{cases} u &= x+y \\ v &= y-x \end{cases}$



$$x = 0 \implies u = v, \qquad y = 0 \implies u = -v, \qquad x + y = 2 \implies u = 2.$$

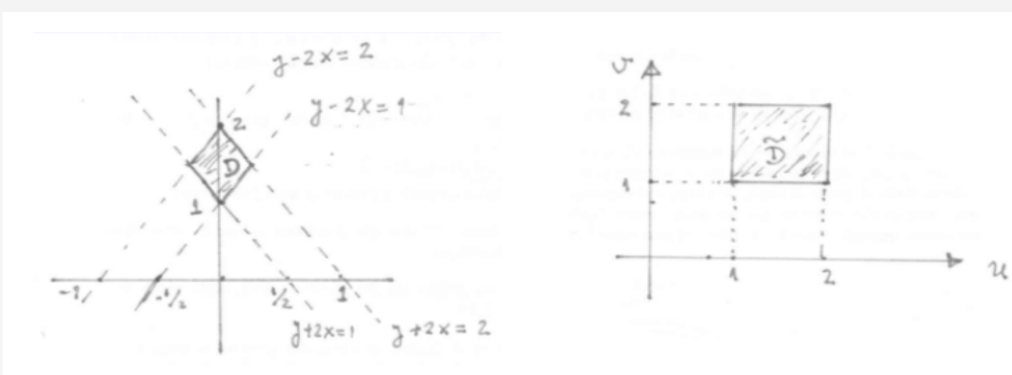
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2. \qquad \therefore \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2}.$$

$$\int_D e^{\frac{y-x}{x+y}} dxdy = \frac{1}{2}\int_{\widetilde{D}} e^{\frac{v}{u}} dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}} dvdu = \frac{1}{2}\int_0^2 ue^{\frac{v}{u}}\Big|_{v=-u}^{v=u} du = \frac{e-e^{-1}}{2}\int_0^2 udu$$

Logo, $\int_D e^{\frac{y-x}{x+y}} dxdy = e - e^{-1}.$

Exemplo 1.30 Calcular $\int_D \frac{y+2x}{y-2x} dA$, onde D é a região limitada pelas retas $y - 2x = 2$, $y + 2x = 2$, $y - 2x = 1$ e $y + 2x = 1$.

Solução: façamos $\begin{cases} u &= y+2x \\ v &= y-2x \end{cases}$

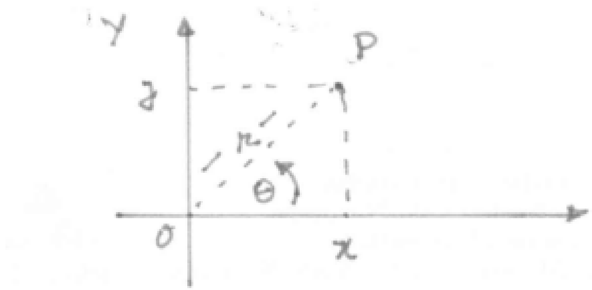


$$y-2x = 2 \implies v = 2, \quad y+2x = 2 \implies u = 2, \quad y-2x = 1 \implies v = 1, \quad \text{e} \quad y+2x = 1 \implies u = 2,$$

$$\int_D \frac{y+2x}{y-2x} dA = \int_{\widetilde{D}} \frac{u}{v^2} \frac{1}{4} dudv = \frac{1}{4} \int_1^2 \int_1^2 \frac{u}{v^2} dudv = \cdots = \frac{3}{16}.$$

1.7 Coordenadas Polares

As coordenadas polares de um ponto P com coordenadas retangulares (x,y) são (r,θ) onde $r = d(P,O)$ é a distância do ponto P à origem O e θ é o ângulo entre o eixo X e o segmento de reta que liga os pontos O e P.



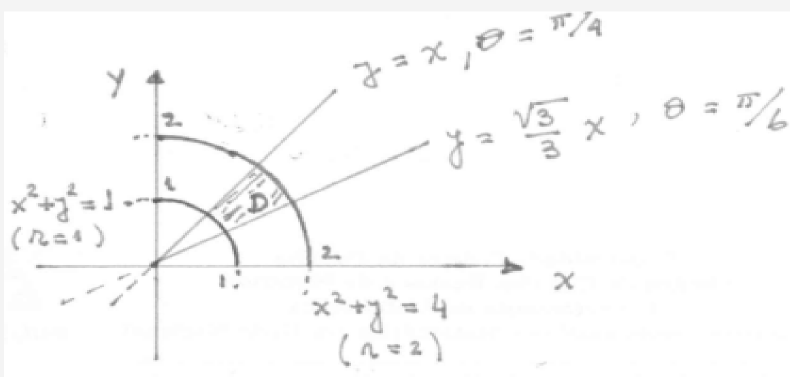
A relação entre as coordenadas (x,y) e as coordenadas (r,θ) é dada por: $\begin{cases} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \end{cases}$

Note que esta mudança é injetiva em $\widetilde{D} = \{(r,atheta) : r > 0,\ \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi\}$ com θ_0 constante.

Além disso, esta mudança transforma a região circular $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2\right\}$ na região retangular $\widetilde{D} = \{(r,\theta) :) \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

A matriz Jacobiana desta transformação é: $J = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$ e $\det(J) = r$.

Exemplo 1.31 Calcular $\int_D \left(x^2+y^2\right) dA$, onde D é a região limitada pelas curvas $x^2+y^2 = 1$, $x^2+y^2 = 4$, $y = x$ e $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, no primeiro quadrante.
Solução:



$$\begin{cases} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \end{cases} \qquad \widetilde{D} = \left\{(r,\theta) : 1 \leq r \leq 2,\ \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right\}$$

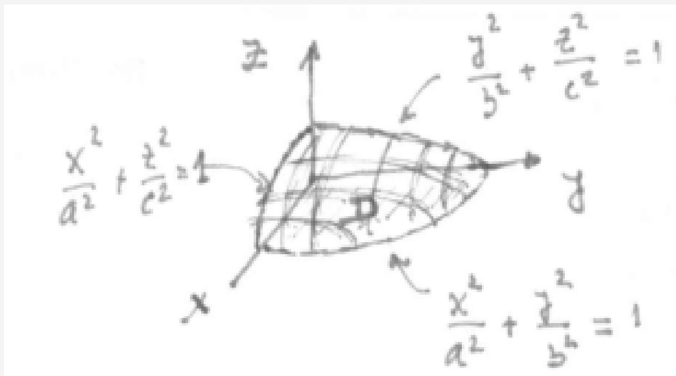
$$\int_D \left(x^2+y^2\right) dA = \int_{\widetilde{D}} r^2 \cdot r dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 r^3 dr d\theta = \cdots = \frac{5\pi}{16}.$$

Exemplo 1.32 Calcular o volume do solido W limitado pelo elipsóide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, com $a>0,\ b>0,\ c>0$.

Solução: Pela simetria do elipsóide podemos calcular a volume no primeiro octante, assim:

$$Vol(W)=8\int_D c\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy$$

onde D é a região, no primeiro quadrante do plano XY, limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.



Façamos a mudança de coordenadas $\begin{cases} x &= ar\cos(\theta) \\ y &= br\sin(\theta) \end{cases}$

O jacobiano desta mudança é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=det\begin{pmatrix} a\cos(\theta) & -ar\sin(\theta) \\ b\sin(\theta) & br\cos(\theta) \end{pmatrix}=abr.$$

Logo,

$$vol(W)=8\int_D c\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy=8abc\int_{\widetilde{D}} r\sqrt{1-r^2}drd\theta=8abc\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sqrt{1-r^2}drd\theta$$

$$vol(W)=\cdots=\frac{4}{3}abc\pi.$$

Note que $\left.\begin{array}{rcl} x &=& ar\cos(\theta) \\ y &=& br\sin(\theta) \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2$. Logo, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Longrightarrow r=1$.

Daí, $\widetilde{D}:\begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \end{cases}$

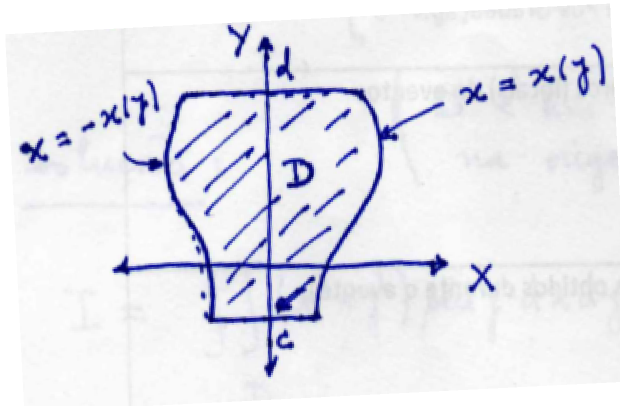
1.8 Simetria em Integrais Duplas

Dos cursos anteriores de Cálculo sabemos que se $f=f(x)$ é uma função impar, então

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0.$$

No caso de integrais duplas temos.

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio simétrico em relação, por exemplo, ao eixo Y.



D é limitado à direita pela curva $x = x(y)$ e à esquerda pela curva $x = -x(y)$.

Seja $f = f(x,y)$ uma função contínua impar na variável x (i.e. $f(-x,y) = -f(x,y)$). Então

$$\int_D f(x,y)dxdy = 0.$$

De fato, neste caso,

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{-x(y)}^{x(y)} f(x,y)dx \right\} dy = \int_c^d 0dy = 0$$

Analogamente, se o domínio D é simétrico em relação ao eixo X e f é impar na variável y (i.e. $f(x,-y) = -f(x,y)$), então $\int_D f(x,y)dxdy = 0$.

Exemplo 1.33 Calcular $I = \int_D \left[\left(x^2+y^2\right)\sin(y) + x^3y^2 \right] dxdy$ onde D é o círculo de raio r e centro na origem.

Solução:

$$I = \int_D \left(x^2+y^2\right)\sin(y)dxdy + \int_D x^3y^2dxdy$$

Note que:

(1) $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\sin(y)$ é impar na variável y e D é simétrico com relação ao eixo X. Logo,

$$\int_D \left(x^2+y^2\right)\sin(y)dxdy = 0.$$

(2) $g(x,y) = x^3y^2$ é impar na variável x e D é simétrico com relação ao eixo Y, logo

$$\int_D x^3y^2dxdy = 0.$$

Assim, $I = 0$.

1.9 Aplicações da Integral Dupla

Massa Total

Considere uma lâmina fina com a forma de uma região elementar $D \subset \mathbb{R}^2$ e suponha que a massa sobre D se distribui com densidade dada por uma função $f : D \to \mathbb{R}$, positiva e integrável sobre D. f representa a massa por unidade de área em cada ponto $(x,y) \in D$.

A massa total de D é dada por

$$M(D) = \int_D f(x,y)dxdy$$

Em particular, se a lâmina é feita de material homogêneo (a densidade é constante), a massa total é o produto da densidade pela área de D.

Momento de Massa

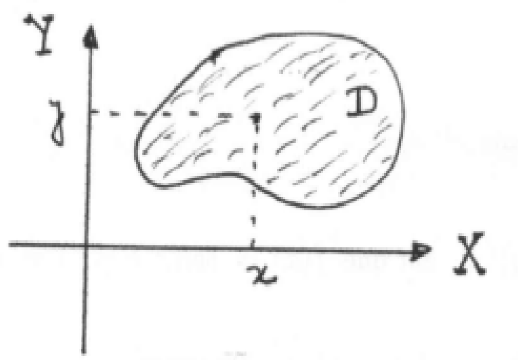
O momento de massa da lâmina D em relação a uma reta l é dao por

$$M_l = \int_D d(x,y) \cdot f(x,y)dxdy$$

onde $d(x,y)$ é a distância do ponto $(x,y) \in D$ à reta l.

Em particular os momentos de massa da lâmina D en relação aos eixos coordenados X e Y são dados, respectivamente, por

$$M_x = \int_D yf(x,y)dxdy \qquad \text{e} \qquad M_y = \int_D xf(x,y)dxdy$$



Centro de Massa

O centro de massa da lâmina D é dado por $(\overline{x},\overline{y})$ onde,

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M(D)} \qquad \text{e} \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{M(D)}$$

Se $f(x,y) \equiv k > 0$, $(\overline{x},\overline{y})$ é chamado de *centróide* de D e correspnde ao centro geométrico da região D.

O centro de massa pode ser pensado como um ponto onde a massa da lâmina se concentra sem alterar seu momento em relção a qualquer eixo.

Se $f(x,y)$ não é constante, então o centro de massa de D pode não coincidir com o centróide de D.

Momento de Inércia

O momento de inércia da lâmina D em relação a uma reta l é

$$I_l = \int_D d^2(x,y) \cdot f(x,y) dxdy$$

onde $d^2(x,y)$ é o quadrado da distância do ponto (x,y) à reta l.

Em particular, se l é o eixo X, então

$$I_X = \int_D y^2 \cdot f(x,y) dxdy$$

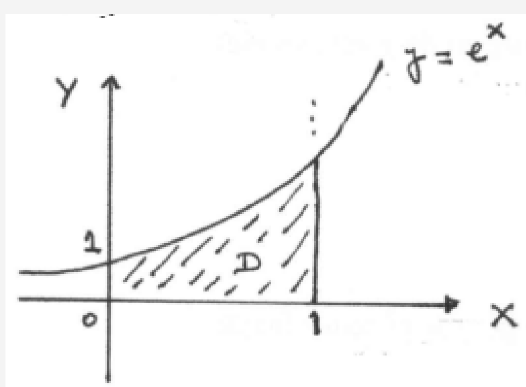
E se l é o sixo Y, então

$$I_Y = \int_D x^2 \cdot f(x,y) dxdy$$

Define-se ainda, o momento de inércia polar em relão à origem como:

$$I_0 = I_X + I_Y = \int_D \left(x^2 + y^2\right) \cdot f(x,y) dxdy$$

Exemplo 1.34 Determinar o momento de inércia polar da região limitada pelas curvas $y = e^x$, $x = 1$, $y = 0$ e $x = 0$; se a densidade é dada por $f(x,y) = xy$
Solução:



$$\begin{aligned} I_X &= \int_D y^2 \cdot xy dx dy = \int_0^1 \int_0^{e^x} xy^3 dy dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4} xy^4 \Big|_{y=0}^{y=e^x} dx = \int_0^1 \frac{1}{4} x e^{4x} dx \\ &= \frac{1}{16} x e^{4x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{16} e^{4x} dx \qquad \left| \begin{array}{ll} u = \frac{1}{4}x & du = \frac{1}{4}dx \\ dv = e^{4x} & v = \frac{1}{4}e^{4x} \end{array} \right. \\ &= \cdots = \frac{3}{64}e^4 - \frac{1}{64}. \end{aligned}$$

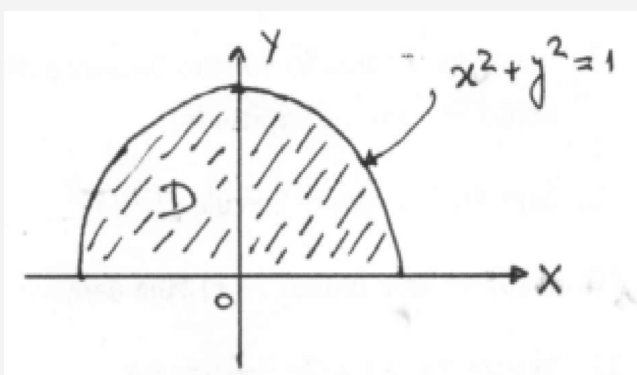
$$\begin{aligned} I_Y &= \int_D x^2 \cdot xy dx dy = \int_0^1 \int_0^{e^x} x^3 y dy dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} x^3 y^2 \Big|_{y=0}^{y=e^x} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x^3 e^{2x} \\ &= \cdots = \frac{e^2}{16} + \frac{3}{16}. \end{aligned}$$

$$I_0 = I_X + I_Y = \frac{3}{64}e^4 + \frac{e^2}{16} - \frac{1}{64} + \frac{3}{16}.$$

$$\therefore \quad I_0 = \frac{1}{64}\left(3e^4 + 4e^2 + 11\right).$$

Exemplo 1.35 Determinar a massa de uma lâmina D que ocupa a região $\left\{ \begin{array}{lcl} x^2 + y^2 & \leq & 1 \\ y & \geq & 0 \end{array} \right.$ se sua densidade, em cada ponto, é proporcional à distância do ponto à origem.

Solução:



A densidade, no ponto (x, y), é $f(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$.

$$M(D) = \int_D k\sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

Passando para coordenadas polares $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$ temos:

$$\begin{aligned} M(D) &= k\int_0^1 \int_0^\pi \sqrt{r^2} r d\theta dr \\ &= k\int_0^1 \int_0^\pi r^2 d\theta dr = \pi k \int_0^1 r^2 dr \\ &= \frac{1}{3}k\pi \ \text{ unidades de massa.} \end{aligned}$$