Integral de superfície de um campo vetorial

Antes de definir a integral de um campo vetorial sobre uma superfície lembremos a definição da integral de linha de um campo vetorial.

Dada uma curva regular $C \subseteq \mathbb{R}^3$ e um campo de vetores $\vec{F}$ sobre C, seja $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização, de classe C^1, e tal que $\gamma'(t) \neq \vec{0}$ $\forall t \in [a,b]$. Definimos a integral de linha do campo $\vec{F}$ ao longo de C como sendo

$$\boxed{\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt}$$

Vimos que esta integral não depende da parametrização γ da curva C desde que seja preservada a orientação e se C^- denota a curva C percorrida no sentido contrário, então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

ou seja esta integral depende da orientação da curva C.

No caso da integral de superfície de um campo vetorial acontece o mesmo, a definição também depende da "orientação da superfície", conceito que definimos a seguir.

Def: Uma superfície $S \subseteq \mathbb{R}^3$ diz-se orientável se é possível escolher um campo contínuo de vetores unitários normais a S em cada ponto.

Ou seja existe uma aplic $n : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ contínua tal que $\| n(p) \| = 1 \quad \forall p \in S$ (o campo é unitário) e além disso, o vetor $n(p)$ é ortogonal ao plano tangente a S no ponto p, T_pS. i.e. $n(p) \perp T_pS$.

No caso de uma superfície parametrizada

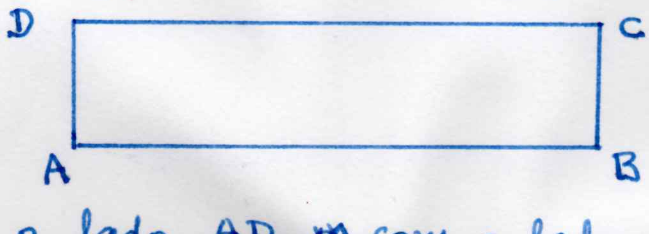
$$\begin{aligned} \varphi : D \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longmapsto \varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{aligned}$$

em que φ é uma parametrização regular ($\varphi_u \wedge \varphi_v \neq \vec{0}$) isto sempre é possível; neste caso,

$$n = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\| \varphi_u \wedge \varphi_v \|}$$

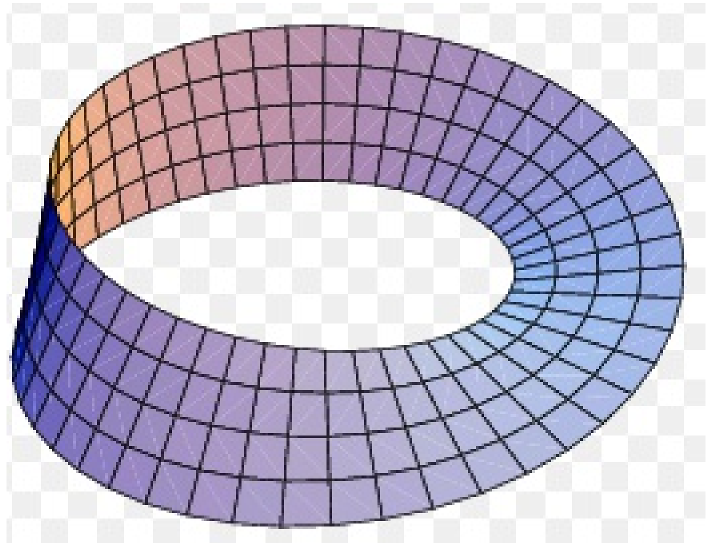
é um campo contínuo, normal a S, de vetores unitários

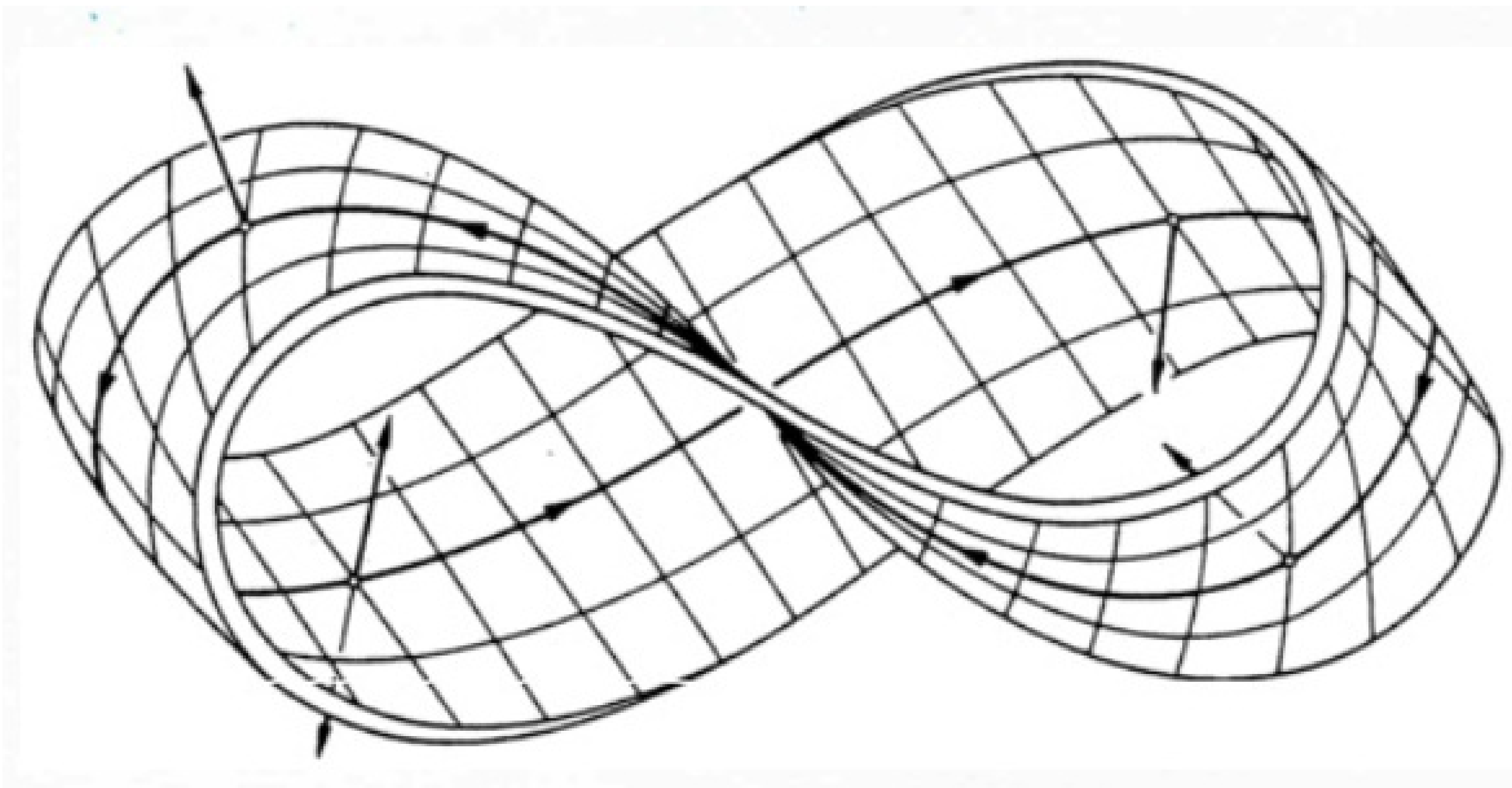
Entretanto nem toda superf. é orientável, um exemplo é dado pela faixa (ou fita) de Möbius que pode ser construída facilmente. Pegue uma fita de papel retangular ABCD



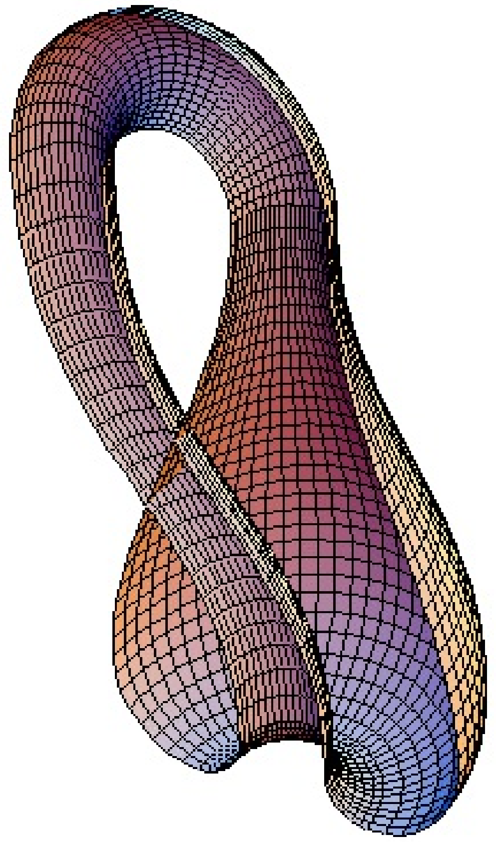
e junte o lado AD ~~A~~ com o lado CB colando A com C e B com D

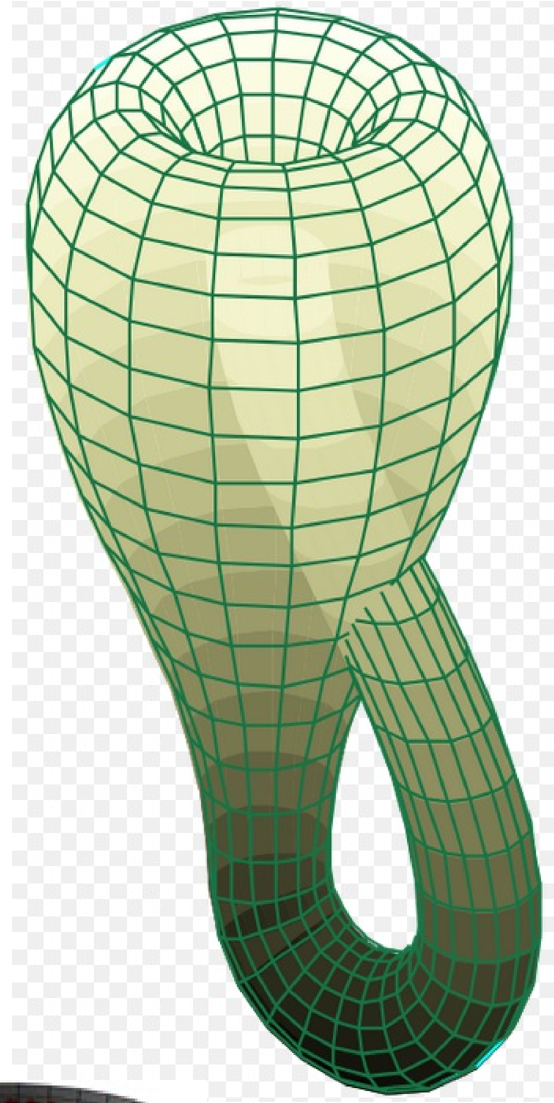
Faixa (ou Fita) de Mobius

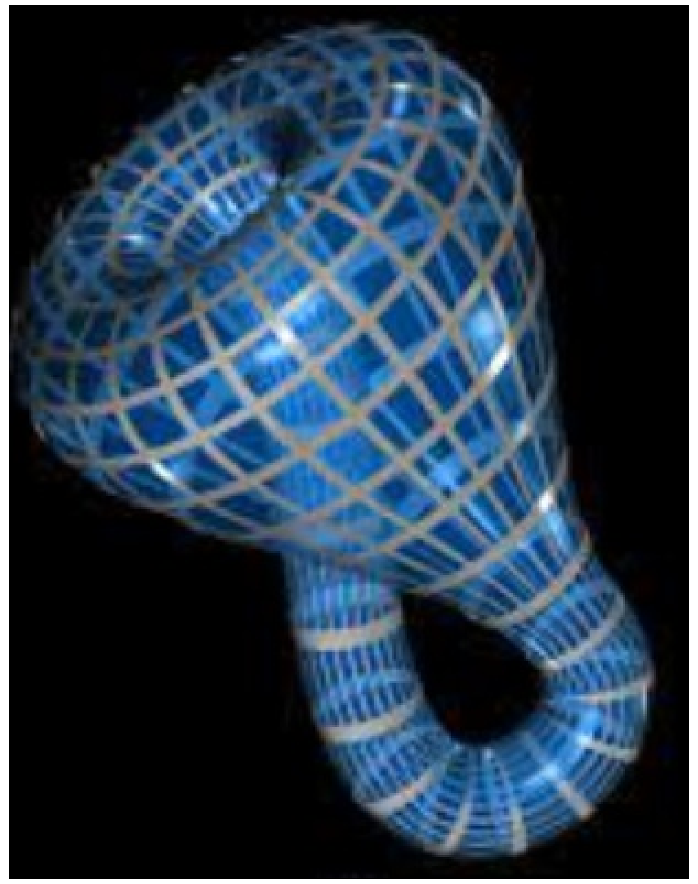


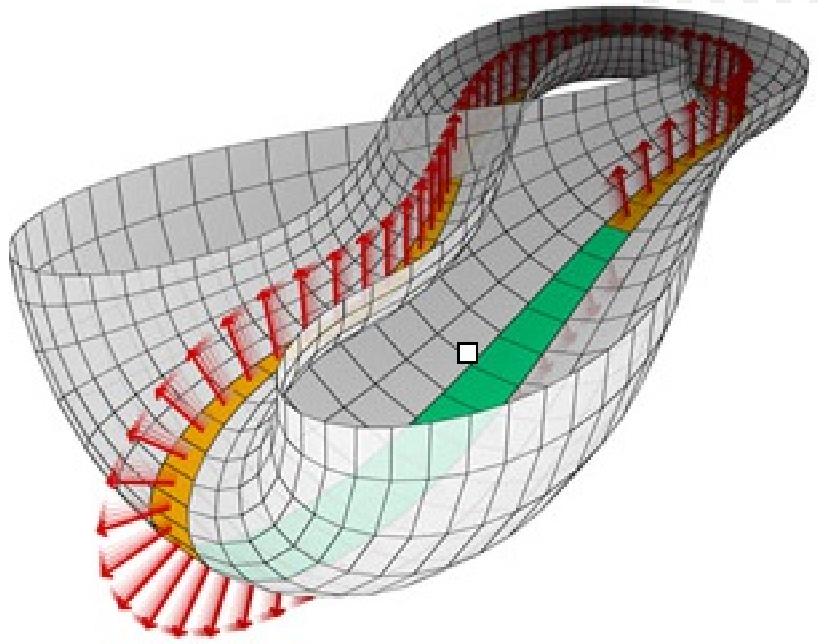


Garrafa de Klein









Intuitivamente uma superfície orientável tem "dois lados"

Se S é orientável, então a escolha de um campo contínuo de vetores unitários ortogonais a S é chamada de orientação e neste caso dizemos que S está orientada

Observe que para uma superfície orientável S só é possível escolher duas orientações, por exemplo, no caso de uma superf. parametrizada temos as orientações

$$\vec{n} = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} \quad e \quad -\vec{n} = \frac{-\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$$

No que segue-se consideraremos só superf orientáveis.

Def. Sejam $S \subseteq \mathbb{R}^3$ uma superf. regular orientável, $\vec{n}$ uma orientação para S (i.e. um campo contínuo em S de vetores unitários ortogonais a S) e seja $\vec{F}$ um campo vetorial contínuo definido num aberto $V \subseteq \mathbb{R}^3$ que contém S ($S \subseteq V$).

A integral de superfície do campo $\vec{F}$ sobre S, ou Fluxo de $\vec{F}$ através de S é a integral de superfície, sobre S, do campo escalar $\vec{F} \cdot \vec{n}$, ou seja

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

Obs:

① Se $\vec{F}$ representa o campo de velocidades de um fluido, então $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$

representa o volume do fluido que atravessa a superf. S em uma unidade de tempo, na direção de $\vec{n}$

② Se S é a superf. parametrizada

$$\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(u,v) = (x, y, z)$$

então

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \int_D \vec{F}(\varphi(u,v)) \cdot \underbrace{\frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}}_{\vec{n}}\ \underbrace{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|\, du\, dv}_{dS}$$

$$= \int_D \vec{F}(\varphi(u,v)) \cdot (\varphi_u \wedge \varphi_v)\, du\, dv$$

Se $\vec{n} = \dfrac{-\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$, então

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = -\int_D F(\varphi(u,v)) \cdot (\varphi_u \wedge \varphi_v)\, du\, dv$$

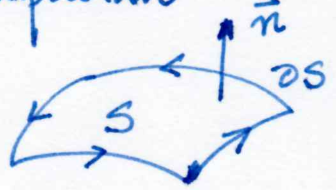
$$= \int_D F(\varphi(u,v)) \cdot (\varphi_v \wedge \varphi_u)\, du\, dv$$

③ Se S é gráfico da função $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, então

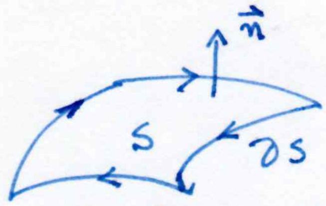
$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \int_D \vec{F}(x,y,f(x,y)) \cdot (-f_x, -f_y, 1)\, dx\, dy$$

quando escolhemos $\vec{n} = \dfrac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$

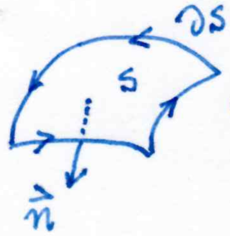
Consideremos agora uma superf. regular S orientada por um campo de vetores unitários ortogonais a S, $\vec{n}$. Dizemos que a fronteira de S, ∂S está orientada positivamente se, ao caminhar ao longo de ∂S com a cabeça no sentido de $\vec{n}$, o interior da superf. S fica a nossa esquerda



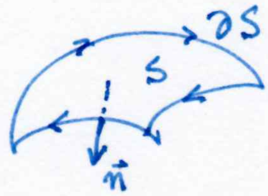
orientação ⊕ de ∂S



orientação ⊖ de ∂S

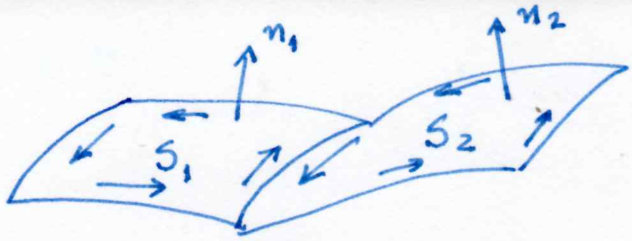


orient ⊖ de ∂S

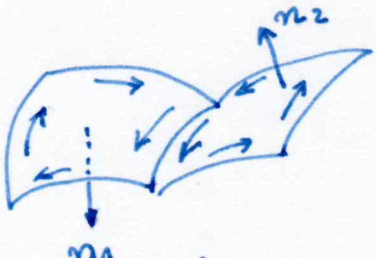


orient ⊕ de ∂S

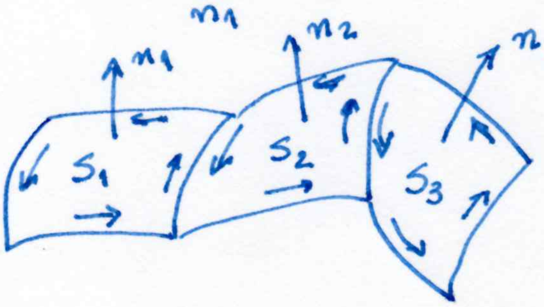
Se $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$, dizemos que S está orientada se é possível orientar cada S_j de modo que na fronteira comum de duas superf., as orientações são opostas.



OK !!



NÃO !!



✓✓

Neste caso, ou seja quando $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$ está orientada, temos

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \int_{S_1} \vec{F} \cdot n_1 dS + \int_{S_2} \vec{F} \cdot n_2 dS + \ldots + \int_{S_k} \vec{F} \cdot \vec{n}_k dS$$

Exemplos

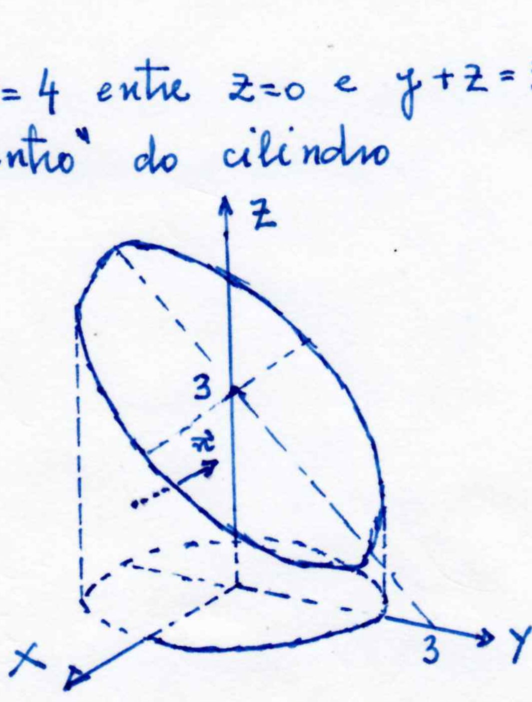
1. Calcular $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$, onde

$\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

S é parte do cilindro $x^2+y^2=4$ entre $z=0$ e $y+z=3$ com $\vec{n}$ apontando para "dentro" do cilindro

Solução:

$\vec{n} = \frac{1}{2}(-x, -y, 0)$



Podemos parametrizar S por:

$$\varphi(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, z), \quad \text{com}$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq z \leq 3 - 2\operatorname{sen}\theta$ $\quad (y = 2\operatorname{sen}\theta)$

temos

$$\varphi_\theta = (-2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta, 0)$$

$$\varphi_z = (0, 0, 1)$$

$$\varphi_\theta \wedge \varphi_z = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 0), \quad \|\varphi_\theta \wedge \varphi_z\| = 2$$

$$-\vec{n} = \frac{1}{2}(2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$$

$$\therefore \quad \underline{\vec{n} = (-\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta, 0)}$$

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \int_D (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, z) \cdot (-\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta, 0) \cdot 2\, d\theta\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{3-2\operatorname{sen}\theta} -4\, dz\, d\theta$$

$$= -4 \int_0^{2\pi} (3 - 2\operatorname{sen}\theta)\, d\theta = -4\left(3\theta + 2\cos\theta\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= -24\pi$$

(2) Calcular $\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, onde

$\vec{F} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} - 2z\vec{k}$,

S é a esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ com $\vec{n}$ apontando para fora da esfera.

Solução:

$$\vec{n} = \frac{1}{2}(x,y,z)$$

Em coord. esféricas:

$$S: \begin{cases} x = 2\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta \\ y = 2\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = 2\cos\phi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi \end{array}$$

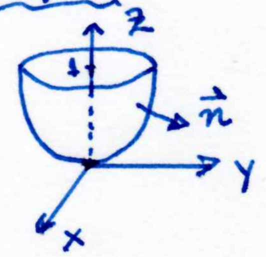
$$\begin{aligned} \vec{F}\cdot\vec{n} &= \frac{1}{2}(x^2+y^2-2z^2) \\ &= \frac{1}{2}(4\,\mathrm{sen}^2\phi - 8\cos^2\phi) \\ &= 2(\mathrm{sen}^2\phi - 2\cos^2\phi) = 2(1-\cos^2\phi - 2\cos^2\phi) \\ &= 2(1-3\cos^2\phi) \end{aligned}$$

$$dS = 4\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi\,d\theta$$

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS &= \int_D 2(1-3\cos^2\phi)\,4\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\theta\,d\phi \\ &= 8\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (\mathrm{sen}\,\phi - 3\cos^2\phi\,\mathrm{sen}\,\phi)\,d\theta\,d\phi \\ &= 16\pi\int_0^{\pi} (\mathrm{sen}\,\phi - 3\cos^2\phi\,\mathrm{sen}\,\phi)\,d\phi \\ &= 16\pi\left(-\cos\phi\Big|_0^{\pi} + \cos^3\phi\Big|_0^{\pi}\right) \\ &= 16\pi\left(-(-1-1) + (-1-1)\right) = 16\pi(2-2) = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

③ Calcular o fluxo do campo $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} + z^2 k$ através da superf. $S: z = x^2+y^2$, $0 \leq z \leq 1$, na direção do vetor normal exterior.

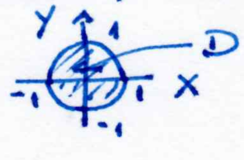
Solução:



uma parametrização para S é

$$\varphi(x,y) = (x, y, x^2+y^2)$$

$(x,y) \in D$, $D: 0 \leq x^2+y^2 \leq 1$



$$\varphi_x = (1, 0, 2x)$$

$$\varphi_y = (0, 1, 2y) \quad , \quad \varphi_x \wedge \varphi_y = (-2x, -2y, 1)$$

$$\| \varphi_x \wedge \varphi_y \| = \sqrt{1+4x^2+4y^2} = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}(2x, 2y, -1) \qquad (\text{normal exterior})$$

$$dS = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\, dx dy$$

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \int_D \left[2xy - 2xy - (x^2+y^2)^2\right] dx dy$$

$$= -\int_D (x^2+y^2)^2 dx dy$$

Em coord. polares $D: \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \,\text{sen}\,\theta \end{cases} \quad x^2+y^2 = r^2 \quad , \quad dxdy = r dr d\theta$$

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = -\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^4 . r\, d\theta dr = -2\pi \int_0^1 r^5 dr$$

$$= -2\pi \left(\frac{1}{6} r^6 \Big|_0^1 \right) = -\frac{2\pi}{6} = -\pi/3$$