Integral de Superfície de um campo Escalar

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^3$ uma superf. regular parametrizada por $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v) = \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$.

Seja $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo definido num aberto $A \subseteq \mathbb{R}^3$ t.q. $\varphi(D) \subseteq A$.

Definimos a integral de superf. do campo $f = f(x,y,z)$ sobre a superf. $S = \varphi(D)$ como:

$$\int_S f \, dS := \int_D f(\varphi(u,v)) \underbrace{\| \varphi_u \wedge \varphi_v \| \, du\, dv}_{dS}$$

Exemplos:

① Se S é o gráfico da função $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D$ então

$$\int_S f \, dS = \int_D f(x, y, z(x,y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx\, dy$$

② Se $f(x,y,z) \equiv 1$ em S, então

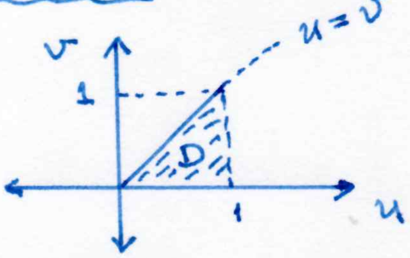
$$\int_S f \, dS = \int_S dS = \text{área}(S)$$

③ Calcular $\int_S xy\,dS$ onde S é a superf. parametrizada por

$$\varphi(u,v) = (u, v, 2u+v-1) \quad \text{com } (u,v)\in D$$

e $D: \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq u \end{cases}$

Solução



$\varphi_u = (1, 0, 2)$

$\varphi_v = (0, 1, 1)$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$\| \varphi_u \wedge \varphi_v \| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \quad dS = \sqrt{6}\,du\,dv \quad (\text{ou } dS = \sqrt{6}\,dv\,du)$$

$$\int_S xy\,dS = \int_D uv\sqrt{6}\,du\,dv = \int_0^1\int_0^u uv\sqrt{6}\,dv\,du$$

$$= \sqrt{6}\int_0^1 u\cdot\frac{v^2}{2}\Big|_{v=0}^{v=u} du$$

$$= \sqrt{6}\int_0^1 \frac{u^3}{2}\,du = \frac{\sqrt{6}}{2}\,\frac{u^4}{4}\Big|_0^1$$

$$= \sqrt{6}/8$$

④ Calcular $\int_S \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\, dS$, onde S é a superf.

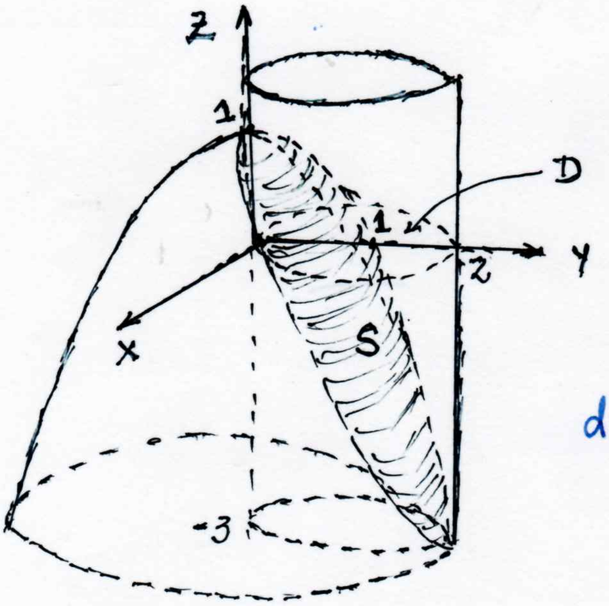
$z = 1 - x^2 - y^2$ que se encontra dentro do cilindro

$x^2 + y^2 \leq 2y$

Solução:

S: $z = f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ (S é gráfico da função $z = f(x,y)$)

D: $x^2 + y^2 \leq 2y$



D

$x^2 + y^2 \leq 2y$

$x^2 + (y-1)^2 \leq 1$

$$dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy = \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dxdy$$

$$\int_S \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\, dS = \int_D \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \cdot \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dxdy$$

$$= \int_D dxdy = \text{área}(D) = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

Massa, Centro de Massa e Momento de Inércia

Se a superfície S representa uma lâmina delgada e $\delta = \delta(x,y,z)$ é a densidade superficial (que supomos contínua) então:

- a massa M de S é dada por

$$M = \int_S \delta(x,y,z)\, dS$$

- o momento de inércia de S em relação a um eixo E é dado por:

$$I_E = \int_S d^2(x,y,z) \cdot \delta(x,y,z)\, dS$$

onde $d(x,y,z)$ é a distância do pto $(x,y,z) \in S$ ao eixo E.

Em particular se o eixo E é:

o eixo Z, então $d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$

o eixo Y, então $d(x,y,z) = \sqrt{x^2+z^2}$

o eixo X, então $d(x,y,z) = \sqrt{y^2+z^2}$

e temos, respectivamente:

$$I_Z = \int_S (x^2+y^2)\, \delta(x,y,z)\, dS$$

$$I_Y = \int_S (x^2+z^2)\, \delta(x,y,z)\, dS$$

$$I_X = \int_S (y^2+z^2)\, \delta(x,y,z)\, dS$$

O centro de massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ é dado por

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_S x\, \delta(x,y,z)\, dS ,$$

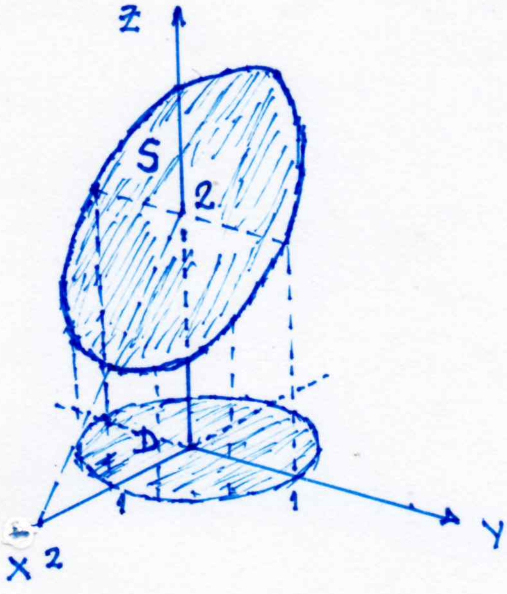
$$\bar{y} = \frac{1}{M} \int_S y\, \delta(x,y,z)\, dS \quad \text{e}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \int_S z\, \delta(x,y,z)\, dS$$

Exemplos:

① Calcular a massa da superf. S que corresponde à parte do plano $z = 2 - x$ dentro do cilindro $x^2+y^2=1$ sendo $\delta(x,y,z) = y^2$ sua densidade.

Solução



$$M = \int_S \delta(x,y,z)\, dS$$

$S: \ z = f(x,y) = 2 - x$

$(x,y) \in D: \ x^2 + y^2 \leq 1$

$$dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy$$
$$= \sqrt{1 + (-1)^2 + 0^2}\, dxdy$$
$$= \sqrt{2}\, dxdy$$

$$\therefore \quad M = \int_S \delta(x,y,z)\, dS = \int_D y^2 \sqrt{2}\, dxdy = \sqrt{2} \int_D y^2\, dxdy$$

Em coord. polares

$$D: \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \left(y^2 = r^2\,\text{sen}^2\theta \right)$$

$$\therefore \quad M = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\,\text{sen}^2\theta \cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 \text{sen}^2\theta\,d\theta$$

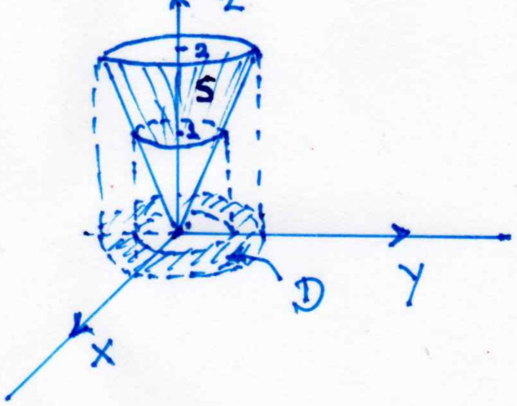
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\,\text{sen}^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\text{sen}\,2\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\cdot 2\pi = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

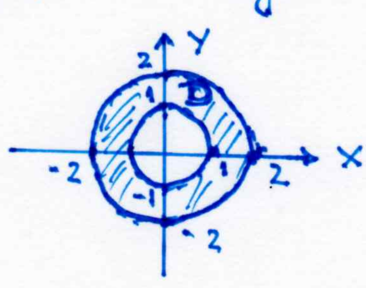
② Determinar o momento de inércia em relação ao eixo Z da superfície parte do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ entre os planos $z=1$ e $z=2$, sendo a densidade constante K

Solução:



$z=1$: $x^2+y^2=1$

$z=2$: $x^2+y^2=4$



$$I_Z = \int_S (x^2+y^2)\cdot K\,dS$$

$$I_z = K\int_S (x^2+y^2)\,dS$$

$S: z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad$ $D: 1 \leq x^2+y^2 \leq 4$

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$1 + f_x^2 + f_y^2 = 1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = 2$$

$\therefore \quad dS = \sqrt{2}\,dxdy \quad (\text{ou } dS = \sqrt{2}\,dydx)$

Daí

$$I_z = K\int_S (x^2+y^2)\,dS = K\int_D (x^2+y^2)\sqrt{2}\,dxdy$$

$$= \sqrt{2}\,K\int_D (x^2+y^2)\,dxdy.$$

Em coord. polares: $\quad D: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 1 \leq r \leq 2 \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x^2+y^2 = r^2 \\ dxdy = r\,dr\,d\theta. \end{matrix}$

$$\therefore \quad I_z = \sqrt{2}\,K\int_1^2\int_0^{2\pi} r^2 . r\,d\theta\,dr$$

$$= \sqrt{2}\,K\int_1^2 r^3 . 2\pi\,dr = 2\sqrt{2}\,K\pi\int_1^2 r^3\,dr$$

$$= 2\sqrt{2}\,K\pi \left.\frac{r^4}{4}\right|_1^2 = 2\sqrt{2}\,K\pi\left(16 - 1/4\right)$$

$$= \frac{15\sqrt{2}}{2}K\pi$$