



Lista de Exercícios N^o 9 : Cálculo III
Professor: Pedro A. Hinojosa

1 Calcule o fluxo do campo $\vec{F} = (xy^2 + e^y)\vec{i} + (yz^2 + \sin^2 x)\vec{j} + (5 + x^2z)\vec{k}$, através da superfície $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$, com campo normal \vec{n} exterior. Resp. $\frac{64\pi}{5}$.

2 Sejam $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$ e $S = \partial W$. Considere a superfície S orientada pelo campo \vec{n} apontando para fora de W . Seja $\vec{F} = \left(\frac{x^3}{3} + y, \frac{y^3}{3}, \frac{z^3}{3} + 2\right)$. Calcule o fluxo de \vec{F} através de S .

Resp. $\frac{\pi}{15}(890 + 3\sqrt{2})$.

3 Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Suponha que $\nabla^2 f = x^2 + y^2$ e calcule $\int_S \nabla f \cdot \vec{n} dS$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com \vec{n} exterior a S . Resp. $\frac{4\pi}{5}$.

4 Seja C a curva do bordo da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está no primeiro octante. Considere C orientada compativelmente com a orientação exterior da esfera. Suponha uma partícula se move sobre a curva C sob a influência do campo de forças $\vec{F} = (x + z^2)\vec{i} + (y^y + x^2)\vec{j} + (z^z + y^2)\vec{k}$. Calcule o trabalho realizado pelo campo para mover essa partícula. Resp. 16.

5 Calcule $\int_C (y^2 \cos(x) + z^3) dx + (2y \sin(x) - 4) dy + (e^x z^2 + 2) dz$, sendo C a hélice parametrizada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$

6 Uma lâmina tem a forma do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, entre os planos $z = 0$ e $z = 3$. Determine a massa da lâmina se a densidade em cada ponto é dada por $f(x, y, z) = x^2$. Resp. 24π unidades de massa.

7 Use o teorema de Stokes para calcular $\int_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} dS$, sendo $\vec{F} = x\vec{j} + xy\vec{k}$ e $S : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1, z \leq 1$, com \vec{n} exterior. Resp. $-\frac{3\pi}{4}$.

8 Calcule $\int_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} dS$, onde $\vec{F} = (ze^x - y)\vec{i} + (x + \cos(yz))\vec{j} + xy\vec{k}$ e $S = S_1 \cup S_2$ com $S_1 : z = 4 - 2x^2 - y^2, 0 \leq z \leq 2$ e $S_2 : z = 1 + x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 2$. Resp. $4\sqrt{2}\pi$.

9 Seja $\vec{F} = (x + z \cos y)\vec{i} + (x - y + z)\vec{j} + (z^4 - 3a^2)\vec{k}$ e sejam $S_1 : x^2 + y^2 = a^2$, com $0 \leq z \leq \sqrt{a}$, ($a > 0$), e $S_2 : z = 0, x^2 + y^2 \leq a^2$. Sabendo que o fluxo de \vec{F} através de $S = S_1 \cup S_2$, de dentro para fora é $a^3\pi$, calcule o valor de a . Resp. $\frac{1}{3}$.