UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br

Lista de Exercícios $N^o\,5$: Cálculo III

Professor: Pedro A. Hinojosa

---

1 *Determine a divergência e o rotacional dos campos de vetores dados abaixo.*

(a) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (\cos(xy), \cos(yz), \sin(xz))$ (b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (e^x\cos(y), e^x\sin(y), e^z)$

(c) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (xyz^2, xy^3z, xyz^3)$ (d) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (\sin(y)\cos(x), \cos(xz), \cos(yz))$

2 *Sejam* $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (ye^x, xe^y, z^2)$ *e* $\overrightarrow{G}(x,y,z) = (x,y,z)$. *Calcule:*

(a) $\nabla\times(\overrightarrow{F}\times\overrightarrow{G})$ (b) $(\nabla\times\overrightarrow{F})\times\overrightarrow{G}$ (c) $(\nabla\times\overrightarrow{F})\times(\nabla\times\overrightarrow{G})$.

3 *Determine se os campos abaixo são conservativos, caso afirmativo, encontre um potencial.*

(a) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (2xz+y^2,\ 2xy,\ e^z+x^2)$ (b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (\ln(xy), \ln(yz), \ln(xz))$

(c) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (e^x, 2e^y, 3e^z)$ (d) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (6xy+z^3, 3x^2-z, 3xz^2-y)$

(e) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (1+y\sin(xz), 1-\cos(xz), z)$ (f) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (xy,\ e^x,\ e^z)$

4 *Verifique as seguintes identidades:*

(a) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$;

(b) $div(f\overrightarrow{F}) = f div(\overrightarrow{F}) + \nabla f\cdot\overrightarrow{F}$;

(c) $div(\overrightarrow{F}\times\overrightarrow{G}) = \overrightarrow{G}\cdot rot(\overrightarrow{F}) - \overrightarrow{F}\cdot rot(\overrightarrow{G})$.

5 *Determine o valor das constantes* a, b *e* c *de modo que os campos abaixo sejam irrotacionais.*

(a) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (axy - z^3, (a-2)x^2, (1-a)xz^2)$;

(b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x+2y+az,\ bx-3y-z,\ 4x+cy+2z)$.

6 *Para uma função* $f = f(x,y,z)$ *de classe* C^2 *em um aberto de* $\mathbb{R}^3$ *definimos o* **Laplaciano de** f *como:* $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Verifique as seguintes identidades:

(a) $\Delta f = div(\nabla f)$;

(b) $div(f\nabla f) = f\Delta f - ||\nabla f||^2$;

(c) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\nabla f\cdot\nabla g$.

7 *Uma função* $f = f(x,y,z)$ *de classe* C^2 *em* $\mathbb{R}^3$ *diz-se harmônica sse* $\Delta f = 0$. *Verifique que as funções abaixo são harmônicas.*

(a) $f(x,y.z) = xz + \ln(xy$;

(b) $f(x,y.z) = e^x\cos(y) + e^y\cos(x)$;

(c) $f(x,y.z) = x^2+y^2+z^2$.

8 *Verifique que todo campo de vetores da forma* $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (A(x), B(y), C(z))$, *onde* A, B *e* C *são funções diferenciáveis, é irrotacional.*