Exercícios - Teorema de Gauss

① Calcule o fluxo do campo

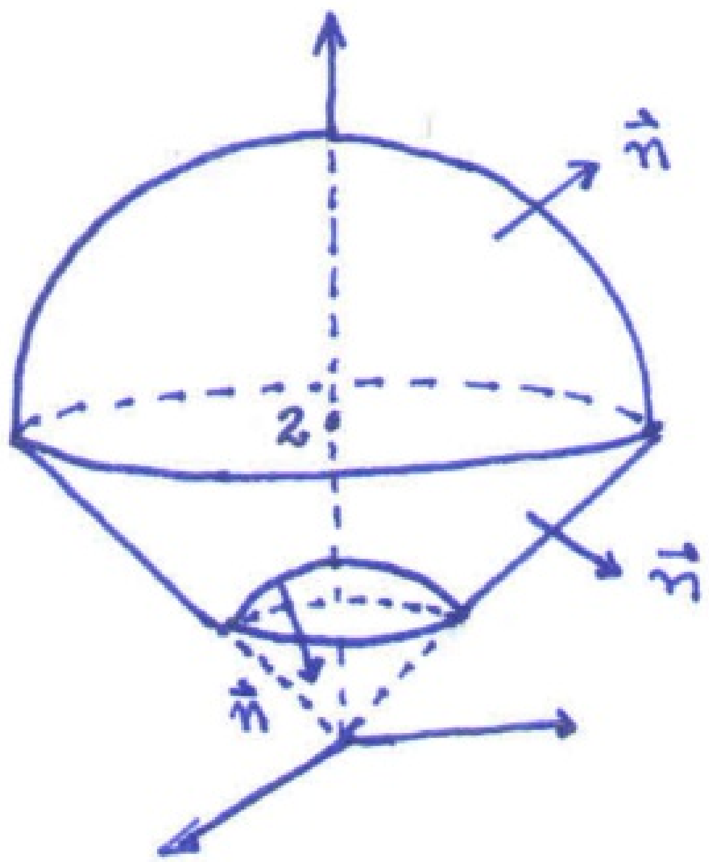
$$\vec{F} = \left(\frac{x^3}{3} + y\right)\vec{i} + \frac{y^3}{3}\vec{j} + \left(\frac{z^3}{3} + 2\right)\vec{k}$$

através da superfície fronteira do sólido W definido por

$$W: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \geq 1 \\ x^2+y^2+(z-2)^2 \leq 4 \\ z \geq \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

com campo normal apontando para fora de W

Solução:



Queremos calcular

$$\int_{S=\partial W} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS .$$

Pelo Teor de Gauss:

$$\int_{S=\partial W} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \int_W \operatorname{div}(\vec{F})\, dV$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = x^2+y^2+z^2$$

$$\therefore \int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \int_W (x^2+y^2+z^2)\, dV$$

Em coord. Esféricas

$$W: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi/4 \\ 1 \leq \rho \leq 4\cos\phi \end{cases}$$

$$x^2+y^2+(z-2)^2 \leq 4$$

$$\underbrace{x^2+y^2+z^2}-4z+\cancel{4} \leq \cancel{4}$$

$$\rho^2 - 4\rho\cos\phi \leq 0$$

$$\underbrace{\{\rho \leq 4\cos\phi\}}$$

$$\begin{cases} x = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

$$\int_W (x^2+y^2+z^2)\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_1^{4\cos\phi} \rho^2 \cdot \rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\rho^5}{5}\Big|_1^{4\cos\phi}\right)\mathrm{sen}\,\phi\, d\phi$$

$$= \frac{2\pi}{5}\int_0^{\pi/4} (4^5\cos^5\phi - 1)\,\mathrm{sen}\,\phi\, d\phi$$

$$= \frac{2\pi}{5}\cdot 4^5\left(-\frac{\cos^6\phi}{6}\right)\Big|_0^{\pi/4} + \frac{2\pi}{5}\cos\phi\Big|_1^{\pi/4}$$

$$= \ldots \ldots = \frac{\pi}{15}(890 - 3\sqrt{2})$$

$$\cos\pi/4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

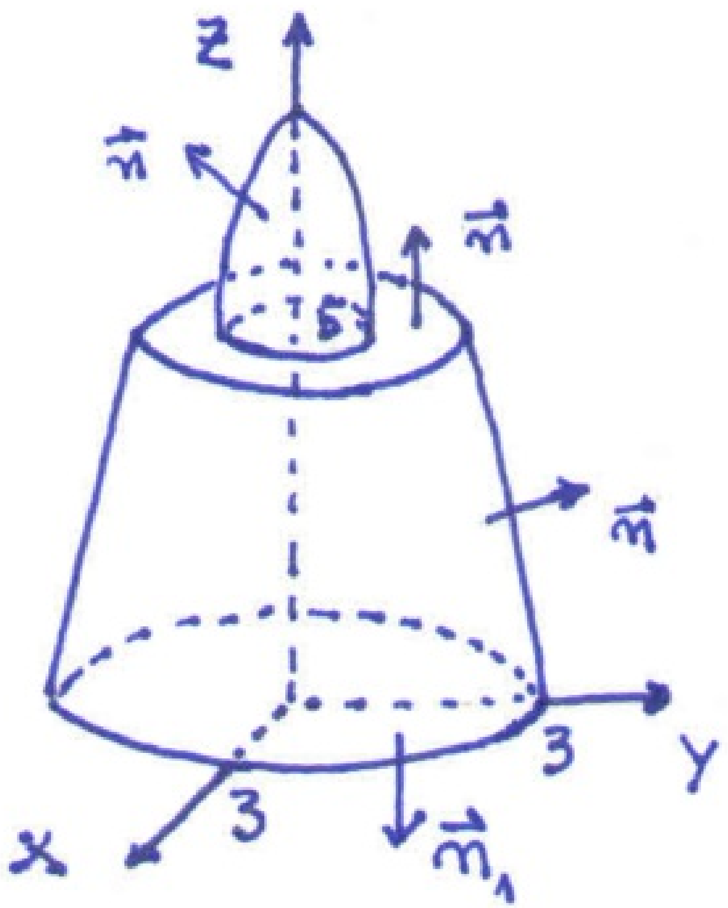
② Calcule $\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, onde

$\vec{F} = x\vec{i} + (e^x\cos z - 2y)\vec{j} + (x^2+z)\vec{k}$

$$S: \begin{cases} z = 9 - x^2 - y^2, & 0 \le z \le 5 \\ z = 5, & 1 \le x^2+y^2 \le 4 \\ x^2+y^2 \le 1, & z = 8 - 3(x^2+y^2) \end{cases}$$

com $\vec{n}$ exterior a S

Solução:



S não é "fechada"

Seja $S_1: \begin{cases} z = 0 \\ x^2+y^2 \le 9 \end{cases}$

orientada por $\vec{n}_1 = -\vec{k}$

Seja W o sólido cuja fronteira é $S \cup S_1$, ou seja $\partial W = S \cup S_1$

Pelo Teor de Gauss temos

$$\int_{\partial W} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_W \operatorname{div}(\vec{F})\,dV, \quad \operatorname{div}(\vec{F}) = 1 - 2 + 1 = 0$$

Logo, $\int_{\partial W} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_W 0\,dV = 0$

e como $\partial W = S \cup S_1$, $\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS + \int_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}_1\,dS = 0$

$$\therefore \int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}_1\,dS$$

$\vec{F}\cdot\vec{n}_1 = -x^2 - z \quad (\vec{n}_1 = -\vec{k})$, $\quad S_1: \begin{cases} z = 0 \\ x^2+y^2 \le 9 \end{cases}$

Logo, em S_1, $\vec{F}\cdot\vec{n}_1 = -x^2$ e $dS = dx\,dy$

$$\int_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}_1\,dS = -\int_D x^2\,dx\,dy$$

Em coord polares $D: \begin{cases} 0 \le \theta < 2\pi \\ 0 \le r \le 3 \end{cases}$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^3 (r\cos\theta)^2\, r\,dr\,d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^3\cos^2\theta\,dr\,d\theta = -\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^3\right)\cos\theta\,d\theta$$

$$= -\frac{3^4}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = -\frac{81}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= -\frac{81}{8}\left(\theta\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\Big|_0^{2\pi}\right) = -\frac{81}{8}\cdot 2\pi = -\frac{81}{4}\pi$$

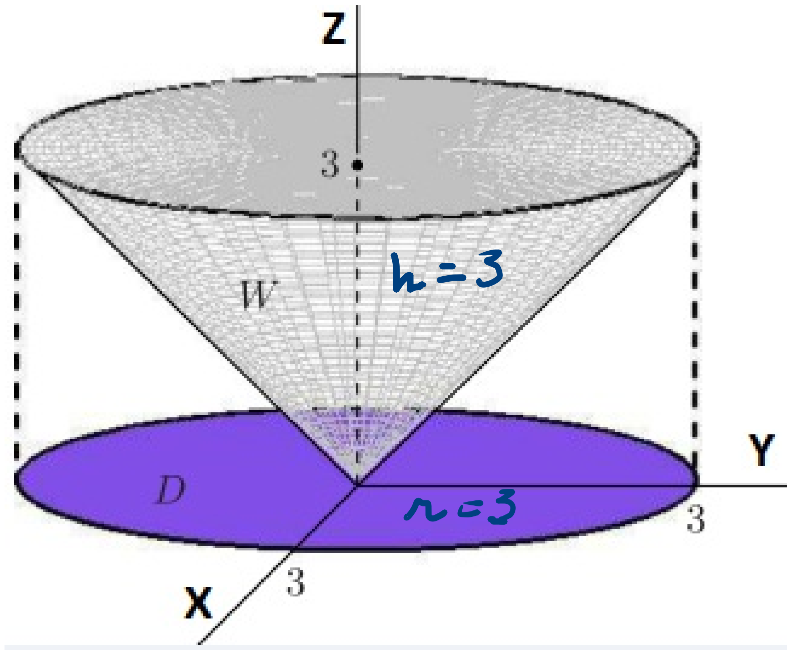
$$\therefore \int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \frac{81}{4}\pi$$

③ Calcular $\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$

$$\vec{F} = (x^2+y^2)\vec{i} + (y^2-2xy)\vec{j} + (4z-2yz)\vec{k}$$

$S = \partial W$, W é o sólido limitado por $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e pelo plano $z = 3$, com orientação positiva

Solução:



Teor. de Gauss:

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \int_W \operatorname{div}(\vec{F})\,dV$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 2x + (2y-2x) + (4-2y)$$

$$\therefore \boxed{\operatorname{div}(\vec{F}) = 4}$$

Daí

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \int_W 4\,dV = 4\int_W dV = 4\,\mathrm{vol}(W)$$

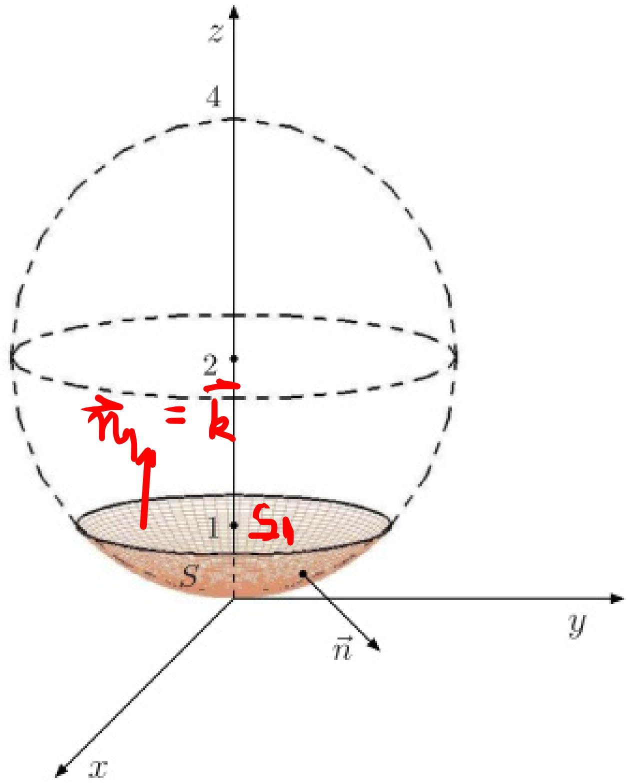
$$= 4\left(\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h\right) = \frac{4}{3}\pi\cdot 3^2\cdot 3 = 36\pi$$

④ Calcule $\int_S \mathrm{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n}\,ds$.

$$\vec{F} = (e^x - y)\vec{i} + (xz+y^2)\vec{j} + 2yz\vec{k}$$

S é a a parte da esfera $x^2+y^2+z^2-4z=0$ com $z \leq 1$, orientada com $\vec{n}$ exterior

Solução



Seja $\tilde{S} = S \cup S_1$, onde

$$S_1: \begin{cases} z = 1 \\ x^2+y^2 \leq 3 \end{cases} \qquad \vec{n}_1 = \vec{k}$$

$$\left(z = 1 \Rightarrow x^2+y^2+1-4 = 0 \Rightarrow \underline{x^2+y^2 = 3} \right)$$

Seja $W \subseteq \mathbb{R}^3$ o sólido t.q. $\partial W = \tilde{S}$

$\tilde{S}$ está orientada positivamente.

Teor. de Gauss $\Rightarrow$

$$\int_{\tilde{S}=\partial W} \mathrm{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n}\,ds = \int_W \operatorname{div}(\mathrm{rot}(\vec{F}))\,dV$$

Lembre que: $\operatorname{div}(\mathrm{rot}\,\vec{F}) = 0$

$$\therefore \int_{\tilde{S}} \mathrm{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n}\,ds = 0$$

Por outro lado,

$$\int_{\tilde{S}} rot(\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS = \int_S rot(\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS + \int_{S_1} rot(\vec{F})\cdot n_1\,dS$$

$$\therefore \int_S rot(\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS = -\int_{S_1} rot(\vec{F})\cdot\vec{n}_1\,dS$$

$$\vec{F} = (e^x - y)\vec{i} + (xz + y^2)\vec{j} + 2yz\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad rot(\vec{F}) = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ e^x - y & xz + y^2 & 2yz \end{pmatrix}$$

$$= (2z - x)\vec{i} - (0 - 0)\vec{j} + (z+1)\vec{k}$$

$rot(\vec{F})\cdot\vec{n}_1 = z+1 \qquad (\vec{n}_1 = \vec{k})$

em S_1, $z = 1$, $\therefore$ $rot(\vec{F})\cdot\vec{n}_1 = 2$

Daí

$$\int_{S_1} rot(\vec{F})\cdot\vec{n}_1\,dS = 2\int_{S_1} dS = 2\,\text{área}(S_1)$$

$$= 2\pi(\sqrt{3})^2 = 6\pi$$

Logo,

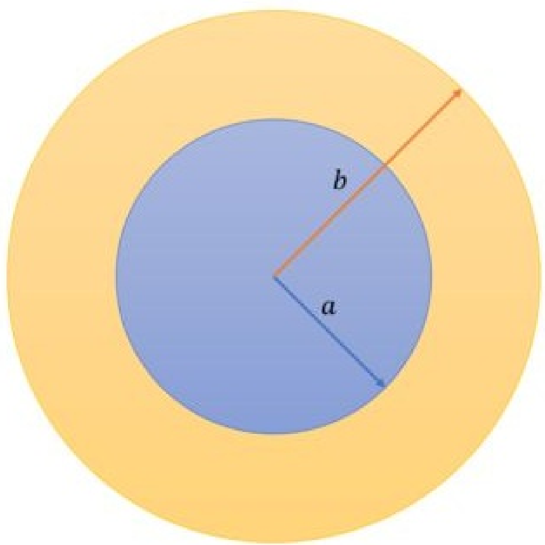
$$\boxed{\int_S rot(\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS = -6\pi}$$

5) Seja W o sólido limitado pelas esferas concêntricas $S_a: x^2+y^2+z^2=a^2$ e $S_b: x^2+y^2+z^2=b^2$, com $a<b$ e orientação positiva (normal apontando para fora de W). Calcule o fluxo do campo

$$\vec{F} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)$$

através de $S = S_a \cup S_b$

Solução:
$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = ?$$



Observe que W não contém a origem, de modo que $\vec{F}$ é de classe C^1 em W. Podemos aplicar o Teor de Gauss

$$\underbrace{\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS}_{\int_{S_a}\vec{F}\cdot\vec{n}_a dS + \int_{S_b}\vec{F}\cdot\vec{n}_b dS} = \int_W \operatorname{div}(\vec{F})\,dV$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{x^2+y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{x^2+y^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{x^2+y^2+z^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\underbrace{\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\therefore \int_W \operatorname{div}(\vec{F})\,dV = \int_W \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz.$$

Em coord. esféricas $\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$ $\quad W: \begin{cases} a \le \rho \le b \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \phi \le \pi \end{cases}$

$$\int_W \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{\rho^2}\cdot\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta\,d\rho$$

$$= 2\pi(b-a)\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\phi\,d\phi = -2\pi(b-a)\cos\phi\Big|_0^{\pi}$$

$$= -2\pi(b-a)(-1-1) = 4\pi(b-a)$$

$$\therefore \int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 4\pi(b-a)$$

⑥ Calcule o fluxo do campo

$$\vec{F} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$$

através da esfera $S: x^2+y^2+z^2 = a^2,\ a>0$, com orientação positiva (pra fora da esfera)

Solução

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = ?$$

Se W é o sólido cuja fronteira é a esfera S (i.é. $W: x^2+y^2+z^2 \le a$) então $(0,0,0) \in W$ e $\vec{F}$ não é C^1 em W. Não podemos aplicar o Teorema de Gauss.

Vamos fazer o cálculo direto.

Neste caso temos $\vec{n} = \frac{1}{a}(x,y,z)$ e logo,

$$\vec{F}\cdot\vec{n} = \frac{1}{a}\,\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{a(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

Em coord. esféricas $\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$

$S: \begin{cases} \rho = a \\ 0 \le \phi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$ $\quad x^2+y^2+z^2 = \rho^2 = a^2$

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \frac{1}{a}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{a}\cdot a^2 \operatorname{sen}\phi \, d\theta\, d\phi$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\, d\phi = -2\pi\cos\phi\Big|_0^{\pi}$$

$$= -2\pi(-1-1) = 4\pi$$

$$\therefore \boxed{\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = 4\pi}$$

Observe que o raio da esfera não aparece no resultado e, claro, se orientamos a esfera com normal apontando para o interior, então

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = -4\pi$$

7 Lei de Gauss para campos de Quadrado Inverso

Seja S uma superfície fechada em $\mathbb{R}^3$ e seja W o sólido cuja fronteira ∂W é S. $(\partial W = S)$.

Se $\vec{F} = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)$, então

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \begin{cases} 4\pi & \text{se } (0,0,0)\in W \\ 0 & \text{se } (0,0,0)\notin W \end{cases}$$

($\vec{n}$ apontando para fora)

Solução: Pensemos $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$,

$$P = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad Q = \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad R = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Para $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ temos:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - x\cdot\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$= \frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\left(x^2+y^2+z^2-3x^2\right)}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

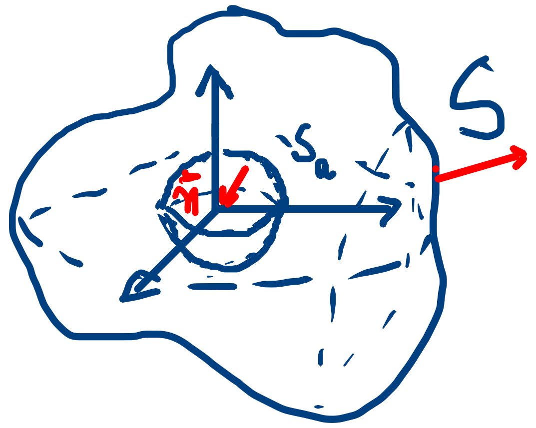
$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{x^2+y^2+z^2-3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$

Analogamente:

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{x^2+y^2+z^2-3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{x^2+y^2+z^2-3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

Daí, $\operatorname{div}(\vec{F}) = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 0$

Caso 1 $(0,0,0)\in W$



S_a: esfera de centro $(0,0,0)$ e raio a, a "pequeno" t.q. $S_a \cap S = \phi$

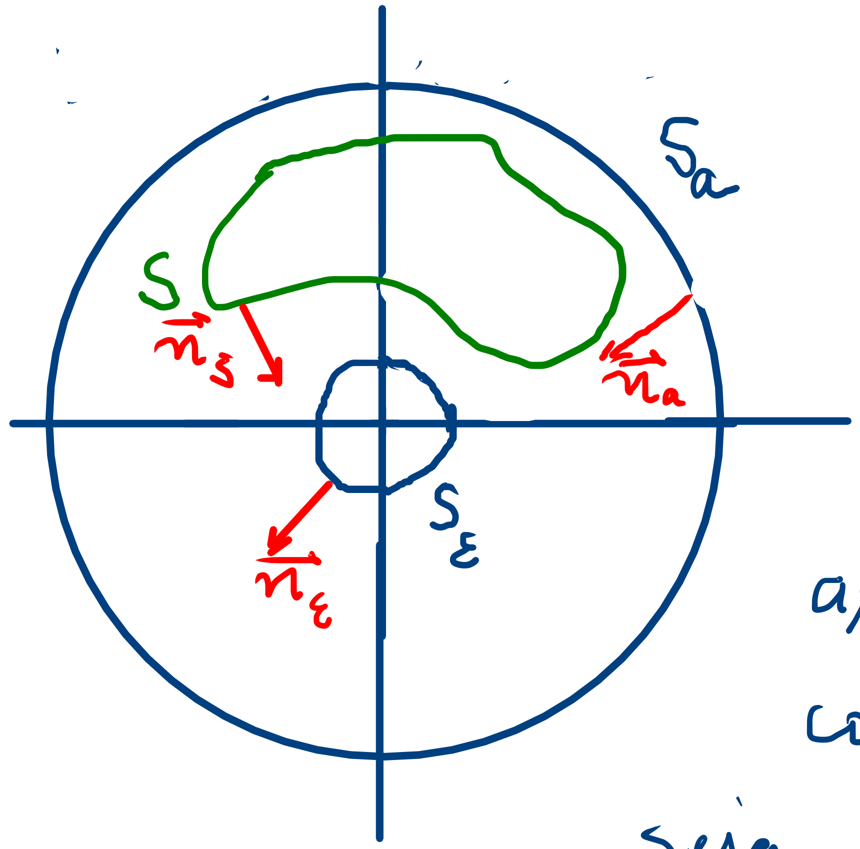
Seja U o sólido t.q. $\partial U = S \cup S_a$

Gauss: $$\int_{\partial U} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_U \underbrace{\operatorname{div}(\vec{F})}_{0}\,dV = 0$$

$$\therefore \int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS + \underbrace{\int_{S_a} \vec{F}\cdot\vec{n}_a\,dS}_{-4\pi} = 0$$

$\vec{n}_a$ aponta para fora da esfera

Logo $$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 4\pi$$



Caso 2 : $(0,0,0) \notin W$

Podemos encontrar a "grande" e ε "pequeno" de modo que as esferas S_a e S_ε não cortem a superf. S

seja $U \subseteq \mathbb{R}^3$ o sólido cuja fronteira é $S_a \cup S \cup S_\varepsilon$.

Gauss: $$\int_{\partial U} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \int_U \cancel{\operatorname{div}(\vec{F})}^{\,0} \, dV = 0$$

Daí,
$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds + \underbrace{\int_{S_\varepsilon} \vec{F} \cdot \vec{n}_\varepsilon \, ds}_{4\pi} + \underbrace{\int_{S_a} \vec{F} \cdot \vec{n}_a \, ds}_{-4\pi} = 0$$

$$\therefore \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = 0$$