

# *Introdução à Controlabilidade de EDO's*

Felipe W. Chaves-Silva

DM - UFPB

Escola de Verão em Matemática da UFPB - 2021

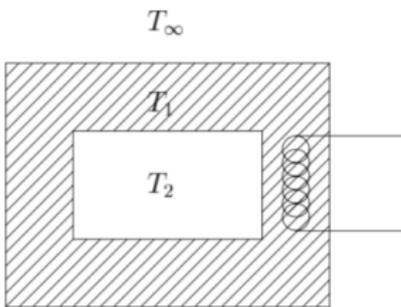
## Controle de um forno elétrico

Vejam os o modelo de um forno elétrico cuja temperatura interior  $T_2$  se controla variando a potência térmica  $u(t)$  nas paredes do forno.

Temos a seguinte equação simplificada para o forno elétrico

$$\begin{cases} c_1 T_1'(t) = -a_1 r_1 (T_1 - T_2)(t) - a_2 r_2 (T_2 - T_\infty)(t) + u(t) \\ c_2 T_2'(t) = a_1 r_1 (T_1 - T_2)(t), \end{cases}$$

onde  $T_\infty$  é a temperatura exterior,  $T_1$  a temperatura da parede,  $T_2$  a temperatura interior do forno e o controle  $u$  é a intensidade de calor produzida por uma bobina.



Os números  $a_i$  são as áreas da superfície interior e exterior das paredes do forno,  $r_i$  são os respectivos coeficientes de transferência de calor das superfícies,  $c_1$  é a capacidade térmica das paredes e  $c_2$  a de seu interior.

Note que estamos assumindo que o fluxo de calor através de uma superfície é proporcional à área da superfície e à diferença de temperatura entre os dois meios.

Tomamos como variáveis de estado as diferenças de temperatura  $y_1 = T_1 - T_\infty$ ,  $y_2 = T_2 - T_\infty$ , e obtemos o sistema de controle

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t)$$

com

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

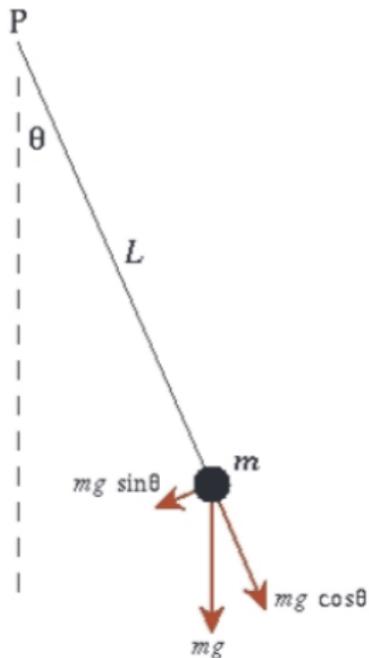
e

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-a_1 r_1 - a_2 r_2}{c_1} & \frac{a_1 r_1}{c_1} \\ \frac{a_1 r_1}{c_2} & \frac{a_1 r_1}{c_2} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Exercício:** Escreva o sistema adjunto e prove a respectiva desigualdade de observabilidade que garante a controlabilidade do sistema.

## Pêndulo

Estudaremos o problema da controlabilidade local do pêndulo, onde o objetivo é controlar um *braço giratório* com um motor localizado em um extremo conectando o braço ao resto da estrutura.



Temos a seguinte equação simplificada do pêndulo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}(t) + \sin\theta(t) = v(t),$$

onde  $\theta$  é o ângulo do braço com respeito ao eixo vertical medido no sentido anti-horário e  $v$  é o *momento de torção* externo aplicado.

A posição vertical estacionária ( $\theta = \pi$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = 0$ ) é uma configuração de equilíbrio se não tivermos controle no sistema, i.e.,  $v \equiv 0$ . Entretanto, essa configuração é claramente *instável*.

O estado do sistema é  $(\theta, \theta')$ , enquanto  $v$  é o controle.

Usaremos o seguinte resultado local de controlabilidade.

### Teorema

Seja o sistema não-linear de controle

$$\begin{cases} y'(t) = f(y, u), \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

e assuma que  $(\bar{y}_e, \bar{u}_e)$  é um ponto de equilíbrio, i.e.,  $f(\bar{y}_e, \bar{u}_e) = 0$ .  
Se o sistema de controle linearizado em torno a  $(\bar{y}_e, \bar{u}_e)$  dado por

$$y' = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{y}_e, \bar{u}_e)y + \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{y}_e, \bar{u}_e)u,$$

é controlável, então o sistema não-linear de controle (1) é localmente controlável em torno a  $(\bar{y}_e, \bar{u}_e)$ . Ou seja, existe  $\epsilon > 0$  tal que para todo

$$|y_0 - \bar{y}_e|_{\mathbb{R}^n} < \epsilon, \quad |y_1 - \bar{y}_e|_{\mathbb{R}^n} < \epsilon$$

existe um controle  $u$  tal que a solução do sistema não-linear de controle (1) satisfaz:

$$y(T) = y_1.$$

No caso do pêndulo, precisamos escrever o sistema na forma (1). Para isso, note que o estado do sistema é  $(\theta, \theta')$  e que o ponto de equilíbrio é

$$(\theta_e = \pi, \theta'_e = 0, u_e = 0).$$

Assim, escrevemos o sistema como

$$(\theta, \theta')' = f(\theta, \theta', u)$$

onde

$$f(\theta, \theta', u) = (\theta', u - \sin \theta).$$

Portanto  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dada por

$$f(x, y, z) = (y, z - \sin x).$$

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi, 0, 0) = (0, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\pi, 0, 0) = (1, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(\pi, 0, 0) = (0, 1).$$

E o sistema linearizado em torno a  $(\pi, 0, 0)$  é

$$(\theta, \theta')' = \frac{\partial f}{\partial \theta}(\pi, 0, 0)\theta + \frac{\partial f}{\partial \theta'}(\pi, 0, 0)\theta' + \frac{\partial f}{\partial u}(\pi, 0, 0)u.$$

ou seja

$$(\theta, \theta')' = (0, 1)\theta + (1, 0)\theta' + (0, 1)u,$$

i.e.,

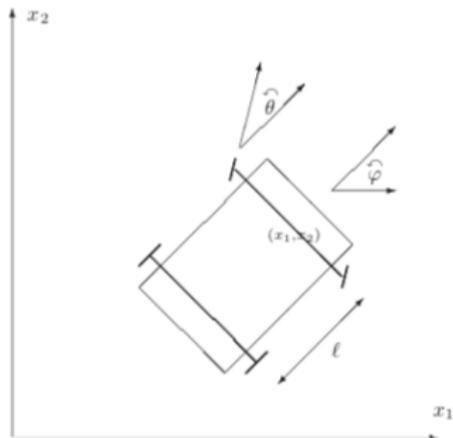
$$\begin{cases} \theta'' = \theta + u, \\ \theta' = \theta'. \end{cases}$$

Em muitas ocasiões, o teorema anterior é o único resultado possível que podemos obter para certas equações não-lineares. Entretanto, podemos também estudar o problema global de controlabilidade, i.e., queremos sair de qualquer estado inicial  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  e chegar a qualquer estado final  $y_1 \in \mathbb{R}^n$  em um tempo  $T > 0$  (pode ser que necessitemos  $T$  suficientemente grande!) utilizando um controle  $u \in \mathcal{U}_{ad}$ .

## Estacionando um carro

Consideraremos um modelo simplificado para o movimento de um automóvel.

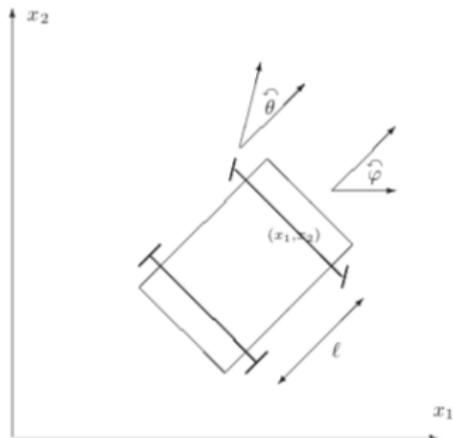
Nosso sistema é descrito por meio de quatro dados  $(x_1, x_2, \varphi, \theta)$ , onde  $(x_1, x_2)$  é a posição do centro do eixo dianteiro do carro,  $\varphi$  é o ângulo entre o eixo  $x_1$  e o carro e  $\theta$  o ângulo entre as rodas dianteiras e o carro.



## Estacionando um carro

Consideraremos um modelo simplificado para o movimento de um automóvel.

Nosso sistema é descrito por meio de quatro dados  $(x_1, x_2, \varphi, \theta)$ , onde  $(x_1, x_2)$  é a posição do centro do eixo dianteiro do carro,  $\varphi$  é o ângulo entre o eixo  $x_1$  e o carro e  $\theta$  o ângulo entre as rodas dianteiras e o carro.



Como queremos modelar um carro e a forma de conduzi-lo, assumiremos que temos dois controles disponíveis  $u_1$  e  $u_2$ , que são a velocidade com que se gira o volante e a velocidade do carro, respectivamente.

Sem perda de generalidade, assumimos  $l = 1$  e nosso sistema de controle simplificado para a condução de um carro é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \theta) \\ \sin(\varphi + \theta) \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

### *Observação*

*O teorema de controlabilidade local que usamos no caso do pêndulo não pode ser aplicado ao caso do carro, pois o sistema linearizado em torno ao ponto de equilíbrio  $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$  neste caso não é controlável.*

*De fato, neste caso temos  $f : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^4$  dada por*

$$f(x_1, x_2, \varphi, \theta, u_1, u_2) = (u_2 \cos(\varphi + \theta), u_2 \sin(\varphi + \theta), u_2 \sin \theta, u_1).$$

Veremos agora um resultado um pouco mais geral, que diz que dado o sistema não-linear de controle

$$\begin{cases} y'(t) = f(y, u), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (3)$$

as direções em que podemos chegar a partir de  $y_0$  são aquelas que pertencem à álgebra de Lie gerada pelos campos vetoriais  $f(y_0, u)$  quando  $u$  varia no conjunto dos controle admissíveis  $\mathcal{U}_{ad}$ .

### Definição

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e sejam

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n),$$

$$Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n).$$

O colchete de Lie  $[X, Y] = ([X, Y]_1, [X, Y]_2, \dots, [X, Y]_n)^T$  é um elemento de  $C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$  definido como

$$[X, Y](x) = Y'(x)X(x) - X'(x)Y(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Em outras palavras, a  $k$ -ésima componente do colchete de Lie é

$$[X, Y]_k(x) = \sum_{j=1}^n X_j(x) \frac{\partial Y_k}{\partial x_j}(x) - Y_j(x) \frac{\partial X_k}{\partial x_j}(x), \quad 1 \leq k \leq n, \quad \forall x \in \Omega.$$

### *Definição*

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto e não vazio e seja  $\mathcal{F}$  uma família de campos vetoriais de classe  $C^\infty$  em  $\Omega$ . Denotamos por  $\text{Lie}(\mathcal{F})$  à álgebra de Lie gerada pelos campos vetoriais em  $\mathcal{F}$ , i.e., ao menor espaço vetorial  $E$  de  $C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$  que satisfaz as condições

- $\mathcal{F} \subset E$
- $X \in E, Y \in E \implies [X, Y] \in E.$

### *Observação*

O espaço vetorial  $E$  sempre existe pois  $C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$  satisfaz as condições desejadas. Assim, basta tomar a interseção de todos os subespaços vetoriais de  $C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$  que satisfazem as condições.

### *Teorema*

*Suponha que para cada  $y_0$  a algebra de Lie gerada por  $f(y_0, u)$  com  $u \in \mathcal{U}_{ad}$  coincide com  $\mathbb{R}^n$ . Então o sistema (3) é controlável, i.e., podemos sair e qualquer estado inicial e chegar a qualquer estado final desejado em um tempo suficientemente grande.*

Voltemos agora ao exemplo do carro

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \theta) \\ \sin(\varphi + \theta) \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Lembre que  $u_2 \equiv 0$  significa mover o volante e que  $u_1 \equiv 0$  significa andar em uma direção.

Na prática, assumimos que o ângulo das rodas  $\theta$  está restringido a um intervalo máximo  $(-\theta_0, \theta_0)$ .

Temos

$$q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } q_2 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \theta) \\ \sin(\varphi + \theta) \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Calculando o colchete de Lie  $[q_1, q_2]$  temos

$$[q_1, q_2] = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi + \theta) \\ \cos(\varphi + \theta) \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

e

$$q_4 = [q_3, q_2] = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Também temos que  $[q_3, q_1] = q_2$ . De fato, só precisamos de  $q_1, q_2, q_3, q_4$ . O determinante

$$\det(q_1, q_2, q_3, q_4) = 1,$$

o que implica que podemos chegar a qualquer estado final desejado do  $\mathbb{R}^4$  somente com os dois controles  $u_1$  e  $u_2$ .

Muito Obrigado!!