Multiplicidade de soluções para o p-Laplaciano e não linearidades com zeros

Eugenio Massa

30 de Maio de 2011

Estudamos existência, multiplicidade e o comportamento respeito ao parâmetro λ, das soluções positivas de um problema da forma

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda h(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro real, Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ suave, e h é uma não-linearidade não negativa com um zero positivo, que pode variar com a variável x. Denotamos por $a(x)$ dito zero. Assumiremos para h um crescimento p-linear (isto é, do tipo u^{p-1}) perto de 0 e $p-$superlinear no infinito. Um modelo simples para h é dado por $h(x,u) = u^{p-1}|a(x) - u|^r$, onde $2 < r + p$ e a é uma oportuna função positiva.

Usando principalmente técnicas variacionais mostramos a existência de pelo menos uma solução positiva para todo $\lambda > 0$, e de pelo menos duas para λ maior do primeiro autovalor de um certo problema aos autovalores não linear e com pesos para o $p-$Laplaciano.

Em seguida estudamos o comportamento assintótico das soluções, mostrando em particular que

$$\lim_{\lambda\to\infty} u_\lambda(x) = a(x), \qquad \text{para todo } x \in \Omega\,.$$

Este comportamento assintótico nos permitirá enfim reobter o resultado acima de existência de pelo menos duas soluções positivas para λ, mas sem restrições sobre o crescimento no infinito da não-linearidade. Para obter isso precisamos renunciar a uma parte da generalidade, supondo que a não-linearidade não dependa da variável $x \in \Omega$ e que o domínio Ω seja convexo.