UFPB/CCEN/DM

Matemática Elementar I - 2011.2

Exercícios de revisão para a primeira avaliação

1. Sejam p, q e r proposições. Mostre que as seguintes proposições compostas são tautologias:
   (a) $\big((p \to r) \wedge (q \to r)\big) \leftrightarrow \big((p \vee q) \to r\big)$;
   (b) $\big((r \to p) \wedge (r \to q)\big) \leftrightarrow \big(r \to (p \wedge q)\big)$;
   (c) $\big(r \wedge (p \to \neg q) \wedge (r \to q)\big) \to \neg p$.

2. Sejam A, B e C subconjuntos de $\mathcal{U}$. Defina a seguinte operação
$$X \vartriangle Y \overset{def}{=} (X - Y) \cup (Y - X),$$
para quaisquer conjuntos X e Y contidos em $\mathcal{U}$. Mostre que
   (a) $A \vartriangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$;
   (b) $A \vartriangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$;
   (c) $A \vartriangle B = A \vartriangle C \Leftrightarrow B = C$.

3. Sejam A, B, X subconjuntos de um conjunto universo $\mathcal{U}$. Suponha que X possua as seguintes propriedades:
   (a) $A \subset X$ e $B \subset X$ (isto é, X contém, simultaneamente, A e B);
   (b) Se $Y \subset \mathcal{U}$ é tal que $A \subset Y$ e $B \subset Y$, então $X \subset Y$. (Isto é, X tem a seguinte propriedade: X sempre está contido em qualquer conjunto que contém tanto A quanto B)

   Prove, com isto, que $X = A \cup B$.

4. Sejam A, B, X subconjuntos de um conjunto universo $\mathcal{U}$. Suponha que X possua as seguintes propriedades:
   (a) $X \subset A$ e $X \subset B$ (isto é, X está contido, simultaneamente, em A e B);
   (b) Se $Y \subset \mathcal{U}$ é tal que $Y \subset A$ e $Y \subset B$, então $Y \subset X$. (Isto é, X tem a seguinte propriedade: X sempre contém qualquer conjunto que está contido tanto em A quanto em B)

   Prove, com isto, que $X = A \cap B$.

5. Considere $A \subset \mathcal{U}$. Em $\mathcal{P}(\mathcal{U})$, defina a seguinte relação:
$$X \sim Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y.$$
Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.

6. Seja $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Considere a seguinte relação em A:

$$(p, q) \sim (r, s) \Leftrightarrow p + s = q + r$$

   (a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em A.

   (b) Considere a função $f : A/\sim\, \to \mathbb{Z}$ dada por $f\big(\, \overline{(p, q)}\, \big) = p - q$. Mostre que f é realmente função de $A/\sim$ em $\mathbb{Z}$ e prove que é bijetiva.

7. Seja $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Considere a seguinte relação em B:

$$(p, q) \sim (r, s) \Leftrightarrow ps = qr$$

   (a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em B.

   (b) Considere a função $f : B/\sim\, \to \mathbb{Q}$ dada por $f\big(\, \overline{(p, q)}\, \big) = p/q$. Mostre que f é realmente função de $B/\sim$ em $\mathbb{Q}$ e prove que é bijetiva.

8. Seja A um conjunto qualquer. Mostre que não existe função sobrejetora de A em $\mathcal{P}(A)$. Siga a sugestão: fixe $F : A \to \mathcal{P}(A)$ uma função qualquer e considere $X = \{x \in A;\ x \notin F(x)\}$. Mostre que X não pertence à imagem da função F. Observação: concluimos assim que $\mathcal{P}(A)$ é um conjunto cuja cardinalidade é sempre maior que a cardinalidade de A.

9. (a) Seja $f : A \to B$ uma função sobrejetiva. Seja P uma partição de B. Mostre que $S \overset{def}{=} \{f^{-1}(Y);\ Y \in P\}$ é uma partição para A.

   (b) Seja $g : A \to B$ uma função injetiva. Seja Q uma partição de A. Mostre que $R \overset{def}{=} \{f(X);\ X \in Q\}$ é uma partição para $f(A)$.

10. (a) Seja A um conjunto enumerável e B um conjunto finito. Construa uma bijeção entre A e $A \cup B$;

    (b) Considere o conjunto $\mathcal{F}$ dado por

$$\mathcal{F} = \{f;\ f : \mathbb{N} \to \{0, 1\} \text{ é função }\},$$

    isto é, $\mathcal{F}$ é o conjunto de todas as funções de $\mathbb{N}$ em $\{0, 1\}$.

      i. Mostre que $\mathcal{F}$ é um conjunto não-enumerável. (uma dica: se $\mathcal{F}$ fosse enumerável, seria uma sequência de funções. Isto é, $\mathcal{F}$ seria igual a $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$, onde cada f_i é uma função de $\mathbb{N}$ em $\{0, 1\}$. Você consegue construir uma função $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ diferente de todas estas f_i?)

      ii. Mostre que $\mathcal{F}$ está em bijeção com $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: considere a seguinte função $G : \mathcal{F} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $G(f) = \{k \in \mathbb{N};\ f(k) = 1\}$. Mostre que G é bijetiva.