UFPB/CCEN/DM

Matemática Elementar I - 2011.2

Exercícios de revisão para a primeira avaliação
Gabaritos selecionados

1. Sejam p, q e r proposições. Mostre que as seguintes proposições compostas são tautologias:

   (a) $\big((p \to r) \wedge (q \to r)\big) \leftrightarrow \big((p \vee q) \to r\big)$;

   (b) $\big((r \to p) \wedge (r \to q)\big) \leftrightarrow \big(r \to (p \wedge q)\big)$;

   (c) $\big(r \wedge (p \to \neg q) \wedge (r \to q)\big) \to \neg p$.

Resposta: Construção de tabela-verdade, já praticado em sala.

2. Sejam A, B e C subconjuntos de $\mathcal{U}$. Defina a seguinte operação

$$X \vartriangle Y \stackrel{def}{=} (X - Y) \cup (Y - X),$$

para quaisquer conjuntos X e Y contidos em $\mathcal{U}$. Mostre que

   (a) $A \vartriangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$;

Resposta: Claramente, se $A = B$ então $A \vartriangle B = (A - A) \cup (A - A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$. Portanto, resta-nos provar que se tivermos $A \vartriangle B = \emptyset$ então devemos ter $A = B$. Vamos mostrar que $A \subset B$: Tome $x \in A$. Observe que temos duas possibilidades: ou $x \in B$ ou $x \notin B$. Mas observe que a segunda possibilidade é impossível pois $x \in A$ e $x \notin B$ significa $x \in A - B$. Mas, por hipótese, $A \vartriangle B = \emptyset$, o que significa, em particular, que $A - B = \emptyset$.Só resta-nos a outra possibilidade: $x \in B$. Daí, provamos que $A \subset B$.

Resta ainda provar que $B \subset A$. Mas o processo é análogo. Observe: Tome $x \in B$. Observe que temos duas possibilidades: ou $x \in A$ ou $x \notin A$. Mas observe que a segunda possibilidade é impossível pois $x \in B$ e $x \notin A$ significa $x \in B - A$. Mas, por hipótese, $A \vartriangle B = \emptyset$, o que significa, em particular, que $B - A = \emptyset$.Só resta-nos a outra possibilidade: $x \in A$. Daí, provamos que $B \subset A$.

   (b) $A \vartriangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$;

Resposta: Tome $x \in A \vartriangle B$. Isto significa que $x \in A - B$ ou $x \in B - A$. Caso $x \in A - B$ então $x \in A$ e $x \notin B$. Portanto, $x \in A \cup B$ (já que $A \subset A \cup B$) e $x \notin A \cap B$ (já que $A \cap B \subset B$). Portanto, $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$, neste caso. No outro caso, ou seja, $x \in B - A$, a consequência é a mesma, com argumentação análoga: se $x \in B - A$ então $x \in B$ e $x \notin A$. Portanto, $x \in A \cup B$ (já que $B \subset A \cup B$) e $x \notin A \cap B$ (já que $A \cap B \subset A$). Portanto, $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$, também neste caso. Sendo assim, $A \vartriangle B \subset (A \cup B) - (A \cap B)$.

Reciprocamente, suponha $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$. Daí temos $x \in A \cup B$ e $x \notin A \cap B$. Ora, temos então duas possibilidades: (1) que $x \in A$ e $x \notin A \cap B$ e (2) que $x \in B$ e $x \notin A \cap B$. Da possibilidade

(1) concluimos que $x \notin B$, donde temos $x \in A - B$. Da possibilidade (2), concluimos que $x \notin A$ e portanto $x \in B - A$. Daí temos sempre que $x \in (A - B) \cup (B - A)$, ou seja $x \in A \bigtriangleup B$.

(c) $A \bigtriangleup B = A \bigtriangleup C \Leftrightarrow B = C$.

Resposta: Obviamente se $B = C$ então $A \bigtriangleup B = A \bigtriangleup C$.

Reciprocamente, suponha que $A \bigtriangleup B = A \bigtriangleup C$. Temos que concluir que $B = C$. Vamos supor, por absurdo, que $B \neq C$. Teríamos então duas possibilidades: (1) existe $x \in B$ tal que $x \notin C$ ou (2) existe $x \in C$ tal que $x \notin B$. Vamos desenvolver a possibilidade (1), primeiramente: como $x \in B$, temos que ou $x \in B - A$ ou $x \in A \cap B$. Caso $x \in A \cap B$, teríamos, por um lado, $x \in A$ e $x \notin C$, o que significaria que $x \in A \bigtriangleup C$, e por outro lado, como $x \in A \cap B$, teríamos $x \notin A \bigtriangleup B$, o que seria impossível pois estamos supondo $A \bigtriangleup B = A \bigtriangleup C$. Daí, $x \in A \cap B$ é impossível, restando-nos a opção de $x \in B - A$ na possibilidade (1). Mas caso tenhamos que $x \in B - A$, como temos $x \in B$ então $x \notin A$ e como $x \notin C$ temos que $x \notin A \cup C$. Consequentemente $x \notin A \bigtriangleup C$. No entanto, de $x \in B - A$ temos que $x \in A \bigtriangleup B$, o que, de novo, é impossível, pois estamos supondo $A \bigtriangleup B = A \bigtriangleup C$. Daí, vemos que a possibilidade (1) não deve ocorrer. A possibilidade (2) também é impossível, raciocinando analogamente, trocando B por C no desenvolvimento que fizemos na possibilidade (1). Sendo assim, concluimos que $B \neq C$ não pode acontecer e portanto $B = C$, como queríamos demonstrar.

3. Sejam A, B, X subconjuntos de um conjunto universo $\mathcal{U}$. Suponha que X possua as seguintes propriedades:

   (a) $A \subset X$ e $B \subset X$ (isto é, X contém, simultaneamente, A e B);

   (b) Se $Y \subset \mathcal{U}$ é tal que $A \subset Y$ e $B \subset Y$, então $X \subset Y$. (Isto é, X tem a seguinte propriedade: X sempre está contido em qualquer conjunto que contém tanto A quanto B)

   Prove, com isto, que $X = A \cup B$.

Resposta: Tome $W = A \cup B$. Observe que W é tal que $A \subset W$ e $B \subset W$. Pela propriedade (b), devemos ter $X \subset W$ e portanto

$$X \subset A \cup B \tag{1}$$

Por outro lado, como $A \subset X$ e $B \subset X$, pela propriedade (a), temos que

$$A \cup B \subset X. \tag{2}$$

Daí, por (1) e (2) temos que $X = A \cup B$, como queríamos.

4. Sejam A, B, X subconjuntos de um conjunto universo $\mathcal{U}$. Suponha que X possua as seguintes propriedades:

   (a) $X \subset A$ e $X \subset B$ (isto é, X está contido, simultaneamente, em A e B);

   (b) Se $Y \subset \mathcal{U}$ é tal que $Y \subset A$ e $Y \subset B$, então $Y \subset X$. (Isto é, X tem a seguinte propriedade: X sempre contém qualquer conjunto que está contido tanto em A quanto em B)

   Prove, com isto, que $X = A \cap B$.

Resposta: Tome $W = A \cap B$. Observe que W é tal que $W \subset A$ e $W \subset B$. Pela propriedade (b), devemos ter $W \subset X$ e portanto

$$A \cap B \subset X \tag{3}$$

Por outro lado, como $X \subset A$ e $X \subset B$, pela propriedade (a), temos que

$$X \subset A \cap B. \tag{4}$$

Daí, por (3) e (4) temos que $X = A \cap B$, como queríamos.

5. Considere $A \subset \mathcal{U}$. Em $\mathcal{P}(\mathcal{U})$, defina a seguinte relação:

$$X \sim Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y.$$

Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.

Resposta: A igualdade de conjuntos é reflexiva, comutativa e transitiva e não há dificuldade de checar que esta relação acima definida é de equivalência. Verifique!

6. Seja $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Considere a seguinte relação em A:

$$(p, q) \sim (r, s) \Leftrightarrow p + s = q + r$$

(a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em A.

(b) Considere a função $f : A/\sim \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f\left(\ \overline{(p, q)}\ \right) = p - q$. Mostre que f é realmente função de $A/\sim$ em $\mathbb{Z}$ e prove que é bijetiva.

Resposta: Feito em sala. O próximo exercício é bem semelhante e está resolvido abaixo.

7. Seja $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Considere a seguinte relação em B:

$$(p, q) \sim (r, s) \Leftrightarrow ps = qr$$

(a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em B.

Resposta: A reflexividade desta relação é imediata: qualquer que seja $(p, q) \in A$, sempre teremos $(p, q) \sim (p, q)$ pois $qp = pq$. A comutatividade também é fácil: supondo que (p, q) e (r, s) são dois elementos em A tais que $(p, q) \sim (r, s)$ então temos $ps = qr$ e isto é o mesmo que $rq = sp$ o que significa que $(r, s) \sim (p, q)$. Provemos então que $\sim$ é transitiva: sejam (p, q), (r, s), (t, u) três elementos em A tais que $(p, q) \sim (r, s)$ e $(r, s) \sim (t, u)$. Isto nos diz que $ps = qr$ e que $ru = st$. Logo, multiplicando a primeira igualdade por u temos $psu = qru$. Mas $qru = qst$, devido à segunda igualdade. Assim $psu = qst$ e como $s \neq 0$ temos $pu = qt$, donde concluimos que $(p, q) \sim (t, u)$ como queríamos.

(b) Considere a função $f : B/\sim \rightarrow \mathbb{Q}$ dada por $f\left(\ \overline{(p, q)}\ \right) = p/q$. Mostre que f é realmente função de $B/\sim$ em $\mathbb{Q}$ e prove que é bijetiva.

Resposta: f é uma função bem definida: se $\overline{(p, q)} = \overline{(r, s)}$ então $(p, q) \sim (r, s)$, ou seja, $ps = qr$. Portanto $p/q = r/s$, já que $q, s \neq 0$. Daí, como $f\left(\ \overline{(p, q)}\ \right) = p/q$ e $f\left(\ \overline{(r, s)}\ \right) = r/s$, temos que $f\left(\ \overline{(p, q)}\ \right) = f\left(\ \overline{(r, s)}\ \right)$.

f é injetiva: sejam $\overline{(p,q)}, \overline{(r,s)} \in A$ tais que $f\big(\ \overline{(p,q)}\ \big) = f\big(\ \overline{(r,s)}\ \big)$. Então $p/q = r/s$, donde temos $ps = qr$. Daí $(p,q) \sim (r,s)$ e portanto $\overline{(p,q)} = \overline{(r,s)}$.

f é sobrejetiva: Seja $w \in \mathbb{Q}$. Sabemos que $w = p/q$ onde $p, q \in \mathbb{Z}$ com $q \neq 0$. Daí, é direto que $f\big(\ \overline{(p,q)}\ \big) = p/q = w$ e portanto w está na imagem de f, provando a sobrejetividade.

8. Seja A um conjunto qualquer. Mostre que não existe função sobrejetora de A em $\mathcal{P}(A)$. Siga a sugestão: fixe $F : A \to \mathcal{P}(A)$ uma função qualquer e considere $X = \{x \in A;\ x \notin F(x)\}$. Mostre que X não pertence à imagem da função F. Observação: concluimos assim que $\mathcal{P}(A)$ é um conjunto cuja cardinalidade é sempre maior que a cardinalidade de A.

Resposta: Suponha que o conjunto X, construido na sugestão, esteja na imagem de F. Daí, existiria um certo $w \in A$ tal que $F(w) = X$. Como $w \in A$, e como $X \subset A$, temos duas possibilidades: ou $w \in X$ ou $w \notin X$. Vejamos que qualquer uma dessas ocorrendo, chegamos numa contradição: caso $w \in X$, por definição de X, temos que $w \notin F(w)$. Mas $F(w) = X$, e portanto $w \notin X$, o que é impossível pois estávamos considerando o caso em que $w \in X$. Daí, resta-nos ver o que aconteceria caso $w \notin X$. Novamente, como $F(w) = X$, teríamos que $w \notin F(w)$. Mas a definição de X força-nos a ver que isto implicaria que $w \in X$. Novamente, temos uma contradição pois começamos com $w \notin X$. Tal w não pode, portanto, existir. A conclusão que chegamos é que X não pode estar na imagem de F e portanto F não é sobrejetiva.

9. (a) Seja $f : A \to B$ uma função sobrejetiva. Seja P uma partição de B. Mostre que $S \overset{def}{=} \{f^{-1}(Y);\ Y \in P\}$ é uma partição para A.

Resposta: Para que a coleção $S = \{f^{-1}(Y);\ Y \in P\}$ seja partição de A, devemos provar três coisas:

1) $\emptyset \notin S$: De fato, seja $Y \in P$. Assim $Y \subset B$ e $Y \neq \emptyset$. Como f é sobrejetiva, temos $f^{-1}(Y) \neq \emptyset$. Portanto, nenhum elemento de S é o conjunto vazio, como queríamos.

2) Os elementos de S são conjuntos dois a dois disjuntos. Vejamos que isto é verdade: Sejam $Y, Z \in P$. Assim, sabemos que $Y \cap Z = \emptyset$ pois P é partição de B. Daí, como $f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z) = f^{-1}(Y \cap Z)$ (verifique isto!!), temos $f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, como queríamos demonstrar.

3) A união de todos os elementos da coleção S é exatamente A: com efeito, já temos que $\displaystyle\bigcup_{Y \in P} Y = B$, pois P é partição de B. Também temos que $f^{-1}(\displaystyle\bigcup_{Y \in P} Y) = \displaystyle\bigcup_{Y \in P} f^{-1}(Y)$ (verifique!!) e daí concluimos que $A = f^{-1}(B) = f^{-1}(\displaystyle\bigcup_{Y \in P} Y) = \displaystyle\bigcup_{Y \in P} f^{-1}(Y)$, como queríamos.

(b) Seja $g : A \to B$ uma função injetiva. Seja Q uma partição de A. Mostre que $R \overset{def}{=} \{f(X);\ X \in Q\}$ é uma partição para $f(A)$.

Resposta: Semelhante ao item anterior! Sua vez de fazer!

10. (a) Seja A um conjunto enumerável e B um conjunto finito. Construa uma bijeção entre A e $A \cup B$;

Resposta: Caso $B \subset A$ então nada haveria a ser feito pois teríamos $A \cup B = A$. Suponha que $B - A \neq \emptyset$ Como B é finito então $B - A$ também o é, já que $B - A \subset B$. Isto é $B - A = \{y_1,\ y_2,\ y_3, \ldots, y_k\}$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Suponha agora que $A = \{x_1, x_2\ , x_3\ ,\ x_4, \ldots\}$. Isto é possível pois A é enumerável.

Logo $A \cup B = A \cup (B - A) = \{y_1,\, y_2, \ldots,\, y_k,\, x_1,\, x_2,\, x_3, \ldots\}$. Seja $f : A \to A \cup B$ dada por

$$f(x_i) = \begin{cases} y_i & \text{se } \ 1 \leq i \leq k \\ x_{i-k} & \text{se } \ i \geq k+1 \end{cases}$$

É imediato verificar que f é bijeção. Faça um diagrama para perceber isto!

(b) Considere o conjunto $\mathcal{F}$ dado por

$$\mathcal{F} = \{f;\ f : \mathbb{N} \to \{0,1\} \text{ é função } \},$$

isto é, $\mathcal{F}$ é o conjunto de todas as funções de $\mathbb{N}$ em $\{0,1\}$.

i. Mostre que $\mathcal{F}$ é um conjunto não-enumerável. (uma dica: se $\mathcal{F}$ fosse enumerável, seria uma sequência de funções. Isto é, $\mathcal{F}$ seria igual a $\{f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots\}$, onde cada f_i é uma função de $\mathbb{N}$ em $\{0,1\}$. Você consegue construir uma função $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ diferente de todas estas f_i?)

Resposta: Vejamos que é possível construir tal f. Queremos que $f \neq f_0$. Para tanto, basta $f(0)$ ser diferente de $f_0(0)$. Se $f_0(0) = 1$ tomamos $f(0) = 0$. Caso contrário, ou seja, caso $f_0(0) = 0$, tomamos $f(0) = 1$. Também queremos f diferente de f_1. Basta então tomar $f(1)$ diferente de $f_1(1)$. Para termos f diferente de f_2, basta também tomarmos $f(2) \neq f_2(2)$, e assim sucessivamente. Em resumo, considere a seguinte função $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$, abaixo definida:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ f_n(n) = 1 \\ 1 & \text{se } \ f_n(n) = 0 \end{cases}$$

Tal f é tal que $f \neq f_i$ para qualquer f_i e portanto, como $f \in \mathcal{F}$, temos que $\mathcal{F}$ não pode ser enumerável.

ii. Mostre que $\mathcal{F}$ está em bijeção com $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: considere a seguinte função $G : \mathcal{F} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $G(f) = \{k \in \mathbb{N};\ f(k) = 1\}$. Mostre que G é bijetiva.

Resposta: Este exercício é imediato e deixamos com você para verificá-lo. Seu trabalho é entender a definição da função G. Feito isso, você vai observar que a injetividade e sobrejetividade são óbvias.