Exemplo 3.17 *Mostre que existe uma função $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo à condição aditiva*

$$T(x + y) = T(x) + T(y), \ \forall \ x, y \in \mathbb{R},$$

mas não é uma transformação linear, isto é, $T(x) \neq ax$, para algum $x \in \mathbb{R}$.

Solução. É fácil verificar que $\mathbb{R}$ com as operações usuais é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$. Assim, pela Observação 2.38, podemos escolher uma base "de Hamel" $\beta = \{x_i\}_{i \in I}$ de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Assim, para cada $x \in \mathbb{R}$, existem únicos $r_{k_1}, \ldots, r_{k_n} \in \mathbb{Q}$, onde $k_1, \ldots, k_n \in I$, tais que

$$x = r_{k_1} x_{k_1} + \cdots + r_{k_n} x_{k_n} = \sum_{j=1}^{n} r_{k_j} x_{k_j}.$$

A função $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(x) = \sum_{j=1}^{n} r_{k_j} T(x_{k_j}), \ \forall \ x \in \mathbb{R},$$

possui as propriedades desejadas, pois se fizermos

$$T(x_{k_1}) = 1 \ \text{ e } \ T(x_{k_2}) = 0,$$

então

$$T(x + y) = T(x) + T(y), \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}, \ \text{ mas } \ T(x) \neq ax, \ \text{ para algum } \ a \in \mathbb{R}.$$

EXERCÍCIOS

---

1. Verifique quais das transformações abaixo são lineares.

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x - y, 0)$.

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x - 1, y + z)$.

   (c) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $T(x) = (x, 2x, -x)$.

   (d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, x^3)$.

   (e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

2. Seja $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{n \times n}$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n. Se $\mathbf{B}$ é uma matriz não-nula fixada em $\mathbf{V}$, quais das seguintes transformações são lineares?

   (a) $T(\mathbf{A}) = \mathbf{BA}$.

   (b) $T(\mathbf{A}) = \mathbf{BA} - \mathbf{AB}$.

(c) $T(\mathbf{A}) = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

(d) $T(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^t$.

(e) $T(\mathbf{A}) = \mathbf{B}^t\mathbf{A}\mathbf{B}$.

3. Sejam $\mathbf{V} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais e $h \in \mathbb{R}$ fixado. Mostre que cada uma das funções $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ abaixo é uma transformação linear:

   (a) $(Tf)(x) = f(x+h)$. (Deslocamento)

   (b) $(Tf)(x) = f(x+h) - f(x)$. (Diferença para frente)

   (c) $(Tf)(x) = f(x) - f(x-h)$. (Diferença para trás)

   (d) $(Tf)(x) = f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2})$. (Diferença central)

   (e) $(Tf)(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2})\right)$. (Valor médio)

4. (**Operador Integração**) Seja $V = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais contínuas. Mostre que a função $J : V \to V$ definida por

$$(Jf)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

   é uma transformação linear.

5. (**Operador Cisalhamento na direção de** x) Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisfaça $T(1,0) = (1,0)$ e $T(0,1) = (a,1)$, onde $a \in \mathbb{R}^*$. Defina **Operador Cisalhamento na direção de** y.

6. Determine o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisfaça $T(1,2) = (1,1)$ e $T(0,1) = (1,0)$.

7. Determine o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisfaça $T(1,0) = (a,b)$ e $T(0,1) = (c,d)$.

8. Seja $V = P(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes reais. Mostre que cada uma das funções $T : V \to V$ abaixo é uma transformação linear:

   (a) $(Tp)(x) = xp(x)$ (Multiplicação por x).

   (b) $(Tp)(x) = \frac{p(x)-a_0}{x}$ (Eliminação do termo constante e divisão por x).

9. Sejam $S : V \to W$ e $T : V \to W$ transformações lineares. Mostre que $S + T$ e aT, para todo $a \in \mathbb{R}$, são lineares. Conclua que o conjunto de todas as transformações lineares $L(V, W)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

EXERCÍCIOS

1. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear.

   (a) Mostre se U é um subespaço de V, então o conjunto

   $$T(U) = \{T(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in U\}$$

   é um subespaço de W.

   (b) Mostre que se Z é um subespaço de W, então o conjunto

   $$T^{-1}(Z) = \{\mathbf{u} \in V : T(\mathbf{u}) \in Z\}$$

   é um subespaço de V.

2. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear definido por $T(x, y) = (x + y, y)$,

   $$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} = 1\}, \;\; B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\} \text{ e} \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}. \end{aligned}$$

   Determine $T(A)$, $T(B)$ e $T(C)$.

3. Para cada tranformação linear abaixo determine o núcleo e a imagem:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (y - x, 0, 5x)$.

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x + y + z, z)$.

4. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Mostre que se

   $$\mathbf{V} = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n],$$

   então

   $$\text{Im}(T) = [T(\mathbf{u}_1), \ldots, T(\mathbf{u}_n)].$$

5. Seja T de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ a função definida por

   $$T(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x + y, -x - 2y + 2z).$$

   (a) Verifique que T é uma transformação linear.

   (b) Se (a, b, c) é um vetor em $\mathbb{R}^3$, quais as condições sobre a, b e c, para que o vetor esteja na imagem de T? Qual é o posto de T?

(c) Quais as condições sobre a, b e c, para que o vetor esteja no núcleo de T? Qual é a nulidade de T?

6. Sejam $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ uma transformação linear. Mostre que se

$$\{T(\mathbf{u}_1), \ldots, T(\mathbf{u}_n)\}$$

é um conjunto linearmente independente de W, então

$$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

é um conjunto linearmente independente de V.

7. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\operatorname{Im} T = [(1, 0, -1), (1, 2, 2)]\,.$$

8. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\operatorname{Im} T = [(1, 2, 3), (4, 0, 5)]\,.$$

9. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\ker T = [(1, 1, 0)].$$

10. Determine uma transformação linear sobrejetora $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 1, 0) = T(0, 0, 1)$.

11. Existe uma transformação linear T de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$ tal que $T(1, -1, 1) = (1, 0)$ e $T(1, 1, 1) = (0, 1)$?

12. Existe uma transformação linear T de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ tal que $T(1, -1) = (1, 0)$, $T(2, -1) = (0, 1)$ e $T(-3, 2) = (1, 1)$?

13. Sejam $S : U \to V$ e $T : V \to W$ transformações lineares.

    (a) Mostre que $\operatorname{Im}(T \circ S) \subseteq \operatorname{Im} T$ e $\operatorname{posto}(T \circ S) \leq \operatorname{posto}(T)$.

    (b) Mostre que $\ker S \subseteq \ker(T \circ S)$ e $\operatorname{nul}(S) \leq \operatorname{nul}(S \circ T)$.

14. Sejam T_1 e T_2 operadores lineares de V tais que

$$\operatorname{nul}(T_1) = \operatorname{nul}(T_2) = 0.$$

Mostre que $\operatorname{nul}(T_1 \circ T_2) = 0$.

15. Sejam $S, T : V \to V$ operadores lineares com $\dim V = n$. Mostre que:

onde

$$\alpha = \{(1,0),(0,1)\} \text{ e } \beta = \{(1,2),(1,-1)\}$$

são bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$*. Portanto,*

$$[T]_\beta^\beta = \mathbf{P}\,[T]_\alpha^\alpha\,\mathbf{P}^{-1},$$

onde

$$\mathbf{P} = [\mathbf{I}]_\beta^\alpha = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIOS

---

1. Seja $D : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear definida por $(Dp)(x) = p'(x)$. Determine a representação matricial de D em relações às bases ordenadas canônicas de $P_3(\mathbb{R})$ e $P_2(\mathbb{R})$, respectivamente.

2. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear definido por

$$T(a + bx + cx^2) = b + ax + cx^2.$$

Determine a representação matricial de T em relação à base canônica de $P_2(\mathbb{R})$.

3. Para cada uma das transformações lineares abaixo, determine bases para o núcleo e a imagem:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (2x - y, 0)$.

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$.

   (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x + y, x + y)$.

   (d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = (x + y, y + z)$.

   (e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x + z, x - z, y)$.

   (f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = (x + 2z, z)$.

4. Seja $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ um operador linear definido por $T(\mathbf{A}) = \mathbf{BA}$, onde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine bases para o núcleo e a imagem de T.

5. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ a função definida por $(Tp)(x) = p(x) + x^2 p'(x)$.

(a) Verifique que T é linear.

(b) Determine bases para o núcleo e a imagem de T.

6. Mesma questão anterior, considerando agora $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, definida por $(Tp)(x) = x^2 p''(x)$.

7. Seja $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ um operador linear definido por $T(\mathbf{A}) = \mathbf{BA} - \mathbf{AB}$, determine bases para o núcleo e a imagem de T, onde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Dentre as transformações dos Exercícios 5 a 7, determine as que são isomorfismos e, para essas, encontre uma regra que defina a inversa.

9. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear definido por $T(\mathbf{u}) = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$ (produto vetorial), onde $\mathbf{w} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ é um vetor fixado. Determine a representação matricial de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$.

10. Sejam $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ transformações lineares definidas por

$$S(x, y) = (x - y, 3x, y) \text{ e } T(x, y, z) = (2x - y - z, x + y).$$

Determine a representação matricial de S, T, $S \circ T$ e $T \circ S$ com respeito às bases ordenadas

$$\alpha = \{(1, 0), (1, 1)\} \text{ e } \beta = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

11. Sejam

$$\alpha = \{(1, -1), (0, 2)\} \text{ e } \beta = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, 2, 0)\}$$

bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine $T(x, y)$.

(b) Se $S(x, y) = (2y, x - y, x)$, então determine $[S]^\alpha_\beta$.

(c) Determine uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]^\alpha_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

12. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear tal que

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Encontre, se possível, vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, tais que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ e $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$.

(b) Determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem de T.

(c) T é um isomorfismo? Se T for um isomorfismo, determine uma matriz que represente T^{-1}, encontrando, também, $T^{-1}(x, y)$.

13. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear tal que

$$[T] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine a representação matricial de T em relação à base $\beta = \{(1, 2), (-1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Qual o significado geométrico do operador T?

14. Seja $T : P_1(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ um operador linear definido por $(Tp)(x) = (1 - x)\, p'(x)$. Determine a representação matricial T em relação à base canônica de P_1.

15. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$(Tp)(x) = \frac{1}{2}(p(x) + p(-x)).$$

Determine a representação matricial de T em relação às bases ordenadas

$$\alpha = \{1, x, x^2\} \text{ e } \beta = \{1, x^2, x\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$.

16. Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ a transformação linear definida por

$$(Tp)(x) = \int_0^1 p(x)\, dx.$$

Determine a representação matricial de T em relação às bases canônicas de $P_3(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}$, respectivamente.

17. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear definido por $T(x, y, z) = (x - y, 2y, y + z)$.

(a) Mostre que T é um isomorfismo.

(b) Determine uma matriz que represente T^{-1} e determine $T^{-1}(x, y, z)$.

18. Determine a rotação de um ângulo θ em torno de uma reta que passa pela origem e tem a direção do vetor $(1, a, 0)$ em $\mathbb{R}^3$ com $a \in \mathbb{R}^*$.

$\mathbf{B}$ é uma matriz $k \times (n-k)$ e $\mathbf{C}$ é uma matriz $(n-k) \times (n-k)$. Logo,

$$f_T = \det(x\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \det(x\mathbf{I}_k - \mathbf{J})\det(x\mathbf{I}_{n-k} - \mathbf{C}) = (x-\lambda)^k h,$$

onde $h = \det(x\mathbf{I}_{n-k} - \mathbf{C})$ é um polinômio de grau $n-k$. Note que λ é o único autovalor de T que satisfaz as equações (4.2) e $(T-\lambda I)(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$, para todo $\mathbf{v} \in V - V^\lambda$, pois se μ é outro autovalor de T, então

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= (T-\lambda I)^k(\mathbf{u}) = \left(\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}T^i(-\lambda I)^{k-i}\right)(\mathbf{u}) \\
&= \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}(-\lambda)^{k-i}T^i(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}(-\lambda)^{k-i}\mu^i\mathbf{u} \\
&= (\mu-\lambda)^k\mathbf{u}.
\end{aligned}$$

Logo, $\mu - \lambda = 0$, isto é, $\lambda = \mu$. Agora, se $(T-\lambda I)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, para algum $\mathbf{v} \in V - V^\lambda$, então $(T-\lambda I)(\mathbf{v}) \in V^\lambda$. Assim, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que

$$(T-\lambda I)^{s+1}(\mathbf{v}) = (T-\lambda I)^s(T-\lambda I)(\mathbf{v}) = \mathbf{0},$$

isto é, $\mathbf{v} \in V^\lambda$, o que é impossível. Portanto, $h(\lambda) \neq 0$ e $m_a(\lambda) = k = \dim V^\lambda$. ■

EXERCÍCIOS

---

1. Determine o polinômio característico dos operadores lineares, encontre seus autovalores e autovetores correspondentes e dar uma base e a dimensão dos respectivos auto-espaços.

   (a) $T(x, y) = (2y, x)$.

   (b) $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$.

   (c) $T(x, y) = (-y, x)$.

   (d) $T(x, y) = (2x + 3y, -x - 2y)$.

   (e) $T(x, y) = (2x + y, -y)$.

   (f) $T(x, y, z, w) = (2x + y, 2y, 2z, 3w)$.

   (g) $T(a + bx + cx^2) = b + ax + cx^2$.

   (h) $(Tp)(x) = p(1 + x)$, $p \in P_3(\mathbb{R})$.

   (i) $T(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^t$, sendo $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   (j) $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 3z)$.

(k) $T(x, y, z) = (2x + 2y, x + y + 2z, x + y + 2z)$.

(l) $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$.

(m) $T(x, y, z) = (-9x + 4y + 4z, -8x + 3y + 4z, -16x + 8y + 7z)$.

(n) $T(x, y, z) = (x + 3y - 3z, 4y, -3x + 3y + z)$.

(o) $T(x, y, z, w) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + w)$.

(p) $T(x, y, z, w) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z, , w)$.

(q) $(Tp)(x) = p'(x)$, $p \in P_2(\mathbb{R})$.

(r) $(Tp)(x) = (1 - x^2)p''(x) - 2xp'(x)$, $p \in P_3(\mathbb{R})$.

2. Qual é o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que possui $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 3$ como autovalores associados, respectivamente, a autovetores da forma $(3y, y)$ e $(-2y, y)$, com $y \neq 0$?

3. Seja $T : V \to V$ um operador linear tendo $\lambda = 0$ como autovalor. Mostre que T é singular.

4. Sejam $T : V \to V$ um operador linear invertível λ um autovalor de T. Mostre que λ^{-1} é um autovalor T^{-1}. O que se pode dizer sobre os autovetores associados?

5. Sejam $T : V \to V$ um operador linear. Mostre que se $\mathbf{v}$ é um autovetor de T associado ao autovalor λ, então $\mathbf{v}$ é um autovetor de T^k associado ao autovalor λ^k, para todo $k \in \mathbb{N}$.

6. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mostre que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^t$ têm o mesmo polinômio característico mas podem ter autovetores distintos.

7. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear definido por

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy),$$

onde a, b, c e d são números reais positivos. Mostre que:

(a) Os autovalores de T são dados por

$$\frac{(a + d) \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2}.$$

(b) Os autovalores de T são reais, distintos e pelo menos um deles é positivo.

8. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear. Mostre que o polinômio característico de T é

$$f_T = x^2 - \operatorname{tr} \mathbf{A} x + \det \mathbf{A}, \quad \text{onde} \quad \mathbf{A} = [T].$$

9. Sejam $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ uma matriz simétrica com autovalor $\lambda_1 = 1$ e $\mathbf{v}_1 = (1, 3)$ o autovetor de $\mathbf{A}$ associado a λ_1.