Prova. Vamos provar apenas os itens (1) e (4). Suponhamos que exista outro vetor $\mathbf{0}' \in V$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0}' = \mathbf{u}$, para todo $\mathbf{u} \in V$. Então

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}'.$$

Como $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$, para todo $\mathbf{u} \in V$, temos, em particular, que $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Logo,

$$\begin{aligned} a\mathbf{0} &= a(\mathbf{0} + \mathbf{0}) \\ &= a\mathbf{0} + a\mathbf{0}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo item (1), $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$. ■

EXERCÍCIOS

---

1. Mostre todas as afirmações deixadas nesta seção.

2. Seja
$$V = \mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}$$
o conjunto dos números complexos. Mostre que V com as operações usuais é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

3. Seja $V = \mathbb{R}^2$. Se $\mathbf{u} = (x_1, x_2) \in V$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2) \in V$, então V, com as operações de adição
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3x_2 + 3y_2, -x_1 - y_1)$$
e multiplicação por escalar
$$a\mathbf{u} = (3ax_2, -ax_1),$$
é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

4. Seja $V = \mathbb{R}^2$. Se $\mathbf{u} = (x_1, x_2) \in V$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2) \in V$, então V, com as operações de adição
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
e multiplicação por escalar
$$a\mathbf{u} = (a^2x_1, a^2x_2),$$
é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

5. Seja $V = \mathbb{R}^2$. Se $\mathbf{u} = (x_1, x_2) \in V$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2) \in V$, então V, com as operações de adição
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
e multiplicação por escalar
$$a\mathbf{u} = (5ax_1, 5ax_2),$$
é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

É fácil verificar que

$$\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^t) \in W_1 \text{ e } \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^t) \in W_2.$$

Portanto, $V = W_1 + W_2$.

EXERCÍCIOS

---

1. Mostre todas as afirmações deixadas nesta seção.

2. Seja $V = \mathbb{R}^3$. Verifique quais dos subconjuntos abaixo são subespaços de V.

   (a) $W = \{(x, y, z) \in V : x + y + z = 0\}$.

   (b) $W = \{(x, y, z) \in V : x \leq y \leq z\}$.

   (c) $W = \{(x, y, z) \in V : x - 3z = 0\}$.

   (d) $W = \{(x, y, z) \in V : x \in \mathbb{Z}\}$.

   (e) $W = \{(x, y, z) \in V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

   (f) $W = \{(x, y, z) \in V : x \geq 0\}$.

   (g) $W = \{(x, y, z) \in V : xy = 0\}$.

   (h) $W = \{(x, y, z) \in V : x = z^2\}$.

3. Seja $V = \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 2$. Verifique quais dos subconjuntos abaixo são subespaços de V.

   (a) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : a = c \text{ e } b + d = 0 \right\}$.

   (b) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : a + d \leq b + c \right\}$.

   (c) $W = \{\mathbf{A} \in V : \mathbf{AB} = \mathbf{BA},\ \mathbf{B} \text{ uma matriz fixa em } V\}$.

   (d) $W = \{\mathbf{A} \in V : \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\}$.

   (e) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : ad - bc \neq 0 \right\}$.

   (f) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : ad - bc = 0 \right\}$.

4. Seja $V = P_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Verifique quais dos subconjuntos abaixo são subespaços de V.

   $\longrightarrow$ Polinômios em $\mathbb{R}$ até grau n (Faça com $n = 4$)

   (a) $W = \{p \in V : p(0) = 0\}$.

(b) $W = \{p \in V : p(0) = 2p(1)\}$.

(c) $W = \{p \in V : p(x) + p'(x) = 0\}$.

(d) $W = \{p \in V : p(2) = 0 \text{ e } p(5) \neq 0\}$.

(e) $W = \{p \in V : p = a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_{2k}x^{2k} \text{ e } 2k \leq n\}$.

5. Seja $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais. Verifique quais dos subconjuntos abaixo são subespaços de V.

(a) $W = \{f \in V : f(0) = 1\}$.

(b) $W = \{f \in V : f(5) = 0\}$.

(c) $W = \{f \in V : f(3) = f(5)\}$.

(d) $W = \{f \in V : f \text{ é contínua}\}$.

(e) $W = \{f \in V : f \text{ é derivável}\}$.

(f) $W = \{f \in V : f \text{ é integrável}\}$.

6. Sejam W_1,W_2 e W_3 os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\right\}, \; W_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\right\}, \\ W_3 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\}. \end{aligned}$$

É verdade que $W_1 + W_2 = W_1 + W_3 = W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$? Em algum dos casos a soma é direta?

7. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W_1, W_2 subespaços de V. Mostre que $V = W_1 \oplus W_2$ se, somente se, todo vetor $\mathbf{v}$ em V pode ser escrito de modo único sob a forma $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, onde $\mathbf{w}_1 \in W_1$ e $\mathbf{w}_2 \in W_2$.

8. Considere

$$W_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\right\}.$$

Encontre um subespaço W_2 de $\mathbb{R}^2$ tal que $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$.

7. Sejam $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais e

$$\begin{aligned} W_1 &= \{f \in V : f(-x) = f(x), \;\; \forall \;\; x \in \mathbb{R}\}, \\ W_2 &= \{f \in V : f(-x) = -f(x), \;\; \forall \;\; x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

subespaços de V. Mostre que $V = W_1 \oplus W_2$.

8. Sejam $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais e $r \in \mathbb{R}_+^*$ fixado. Mostre que o conjunto

$$W_r = \{f \in V : f(x) = 0, \;\; \forall \;\; x \in [-r, r]\}$$

é um subespaço de V.

Solução. Seja W um subespaço qualquer de $\mathbb{R}^2$. Então

$$\begin{aligned} W_1 &= \{x \in \mathbb{R} : x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 = (x, y) \in W, \text{ para algum } y \in \mathbb{R}\} \text{ e} \\ W_2 &= \{y \in \mathbb{R} : y\mathbf{e}_2 = (0, y) \in W\} \end{aligned}$$

são subespaços de $\mathbb{R}$ (prove isto!). Logo, existem $x_0, y_1 \in \mathbb{R}$ tais que

$$W_1 = [x_0] \text{ e } W_2 = [y_1].$$

Assim, pela definição destes subespaços, podemos encontrar $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{u}_0 = (x_0, y_0) \in W$ e $\mathbf{u}_1 = (0, y_1) \in W$.

Afirmação. $W = [\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1]$.

De fato, dado $\mathbf{u} = (x, y) \in W$, $x \in W_1$, de modo que $x = ax_0$, para algum $a \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\mathbf{u} - a\mathbf{u}_0 = (0, y - ay_0) \in W \Rightarrow y - ay_0 \in W_2.$$

Logo, $y - ay_0 = by_1$, para algum $b \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$\mathbf{u} = (x, y) = (ax_0, ay_0 + by_1) = a\mathbf{u}_0 + b\mathbf{u}_1,$$

isto é, $W = [\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1]$.

EXERCÍCIOS

---

1. Mostre que todo vetor em $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $(1, 2)$ e $(5, 0)$. Que relação existe entre $\mathbb{R}^2$ e $[(1, 2), (5, 0)]$?

2. Sejam $V = P_2(\mathbb{R})$ e
$$f = 2 - 3x + 5x^2, g = -8 + 5x - 2x^2$$
vetores em V. Quais dos vetores $p = -26 + 11x + 7x^2$ e $q = 1 + x + x^2$ são combinações lineares dos vetores f e g?

3. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e
$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, -2), \mathbf{u}_2 = (3, 0, 4)$$
vetores em V. Quais dos vetores $\mathbf{u} = (4, -5, 9)$, $\mathbf{v} = (3, 1, -4)$ e $\mathbf{w} = (-1, 1, 0)$ são combinações lineares dos vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$?

4. Sejam $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ e
$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$
vetores em V. Quais dos vetores
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 9 & -7 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$
são combinações lineares dos vetores $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{A}_3$?

5. Encontre os geradores para os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

   (a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$.

   (b) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = x - 2y = 0\}$.

   (c) $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0\}$.

   (d) $W_1 \cap W_2$.

   (e) $W_2 + W_3$.

6. Sejam $V = \mathbb{R}^4$ e

$$W = \{(x, y, z, t) \in V : x + 2y - 2z = 0 \text{ e } t = 0\}$$

   um subespaço de V. Quais dos vetores $\mathbf{u} = (-2, 4, 3, 0)$, $\mathbf{v} = (6, 2, 4, 1)$ e $\mathbf{w} = (-2, 1, 0, 0)$ estão em W?

7. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, -2), \mathbf{u}_2 = (3, 0, 4), \mathbf{u}_3 = (-1, 1, 0)$$

   vetores em V. Determine o valor de k de modo que $(4, -5, k) \in [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$.

8. Sejam $V = P_3(\mathbb{R})$ e

$$p_0 = 1, \ \ p_1 = 1 - x, \ \ p_2 = (1 - x)^2, \ \ p_3 = (1 - x)^3$$

   vetores em V. Quais dos vetores em V são combinações lineares dos vetores p_0, p_1, p_2 e p_3?

9. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ dois vetores não-nulos de $\mathbb{R}^2$ e suponhamos que não exista um escalar a tal que $\mathbf{u} = a\mathbf{v}$. Mostre que

$$\mathbb{R}^2 = [\mathbf{u}] \oplus [\mathbf{v}] .$$

2.4 Dependência e Independência Linear

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$. Dizemos que os vetores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ são *linearmente dependentes* (*LD*) se existirem escalares $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, não todos iguais a 0, tais que

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}. \tag{2.1}$$

Ou, equivalentemente, a equação vetorial (2.1) admite uma solução não-nula. Caso contrário, dizemos que os vetores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ são *linearmente independentes* (*LI*) ou, equivalentemente, a equação vetorial (2.1) admite apenas a solução nula.

Prova. Suponhamos que o conjunto $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ seja LD. Então, por definição, existem escalares $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Seja k o maior inteiro tal que $x_k \neq 0$. Então

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}.$$

Se $k = 1$, então $x_1\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ e, assim, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$, o que é impossível. Portanto, $k > 1$ e

$$\mathbf{u}_k = (-\frac{x_1}{x_k})\mathbf{u}_1 + \cdots + (-\frac{x_{k-1}}{x_k})\mathbf{u}_{k-1}.$$

■

Exemplo 2.37 *Seja* $V = \mathbb{R}^2$. *Então os vetores* $\mathbf{u}_1 = (1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1)$ *e* $\mathbf{u}_3 = (1, 0)$ *são LD, pois*

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2.$$

EXERCÍCIOS

---

1. Seja $V = \mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ e $\mathbf{v} = (y_1, \ldots, y_n) \in V$. Mostre que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são LD se, e somente se, existe um escalar $a \in \mathbb{R}$ tal que $y_i = ax_i$, $i = 1, \ldots, n$.

2. Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vetores de um espaço V. Se $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é um conjunto LI, mostre que:

   (a) $\{\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w}, \mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{w}\}$ é um conjunto LI.

   (b) $\{\mathbf{u} + \mathbf{v} - 3\mathbf{w}, \mathbf{u} + 3\mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}\}$ é um conjunto LD.

3. Sejam $\mathbf{u} = (a, b)$, $\mathbf{v} = (c, d)$ vetores de $\mathbb{R}^2$. Mostre que o conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é LD se, e somente se, $ad = bc$.

4. O conjunto $\{1, x, x^2, 2 + x + 2x^2\}$ é LI ou LD em $P_2(\mathbb{R})$? O que se pode afirmar a respeito de qualquer um de seus subconjuntos com três elementos?

5. Encontre um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ tal que $[\mathbf{u}] = W_1 \cap W_2$, onde

$$W_1 = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)] \text{ e } W_2 = [(1, 2, 3), (1, -1, 1)].$$

6. Em quais condições sobre o escalar k, o conjunto

$$\{(1, 0, k), (1, 1, k), (1, 1, k^2)\}$$

   é LI em $\mathbb{R}^3$?

7. Seja $V = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais contínuas. Quais dos subconjuntos abaixo são LI em V.

   (a) $\{x, x+1, x^2-1\}$.

   (b) $\{x+5, x^2-x, x^2+x-10\}$.

   (c) $\{(x+1)^2, 2x, x+\frac{1}{2}\}$.

   (d) $\{(x+1)^2, x^2-1, x+1\}$.

   (e) $\{1-x, x(1-x), 1-x^2\}$.

   (f) $\{1, e^x, e^{-x}\}$.

   (g) $\{\operatorname{sen} x, \cos x, \tan x\}$.

8. Responda verdadeiro (V) ou falso (F). Justifique.

   ( ) Todo conjunto que contém um subconjunto LD é LD?

   ( ) Todo subconjunto de um conjunto LI é LI?

   ( ) Todo conjunto que contém dois vetores iguais é LI?

   ( ) Todo conjunto que contém o vetor nulo é LI?

9. Sejam $V = \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}$. Mostre que o conjunto $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ é LI se, e somente se, o conjunto $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i + a\mathbf{u}_j, \ldots, \mathbf{u}_j \ldots, \mathbf{u}_m\}$ é LI, para todos $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, com $i < j$.

2.5 Bases e Dimensão

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um conjunto $\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ de vetores em V é uma *base* de V se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ é LI.

2. $V = [\alpha] = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$.

Ou, equivalentemente,

$$V = [\mathbf{u}_1] \oplus [\mathbf{u}_2] \oplus \cdots \oplus [\mathbf{u}_n].$$

Mais geralmente, um subconjunto não-vazio β de V é uma base de V se β é LI e $[\beta] = V$.

Observação 2.38 *Pode ser provado, usando o Lema de Zorn, que todo espaço vetorial $V \neq \{\mathbf{0}\}$ possui uma base.*

Exemplo 2.39 *Seja $V = \mathbb{R}^3$. É fácil verificar que o conjunto*

$$\beta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$$

é uma base finita de V, a qual é chamada de base canônica *de V.*

3. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W_1, W_2 subespaços V, onde $\dim W_1 = 4$, $\dim W_2 = 5$ e $\dim V = 7$. Determine os possíveis valores para $\dim(W_1 \cap W_2)$.

4. Seja $V = \mathbb{R}^4$. Determine uma base e a dimensão dos subespaços

$$\begin{aligned} W_1 &= [(1,4,-1,3),(2,1,-3,-1),(0,2,1,-5)] \text{ e} \\ W_2 &= [(1,-4,-2,1),(1,-3,-1,2),(3,-8,-2,7)]. \end{aligned}$$

5. Sejam $V = \mathbb{R}^3$,

$$W_1 = \{(x,y,z) \in V : x = 0\} \text{ e } W_2 = [(1,2,0),(3,1,2)]$$

subespaços de V. Determine uma base e a dimensão para W_1, W_2, $W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$.

6. Sejam $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : b = -a \right\} \text{ e } W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : c = -a \right\}.$$

subespaços de V. Determine uma base e a dimensão para W_1, W_2, $W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$. É verdade que $\mathbb{R}^{2\times 2} = W_1 \oplus W_2$?

7. Seja $V = P_3(\mathbb{R})$. Determine uma base e a dimensão do subespaço

$$W = \{p \in V : p'(x) = 0\}.$$

8. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e o conjunto de vetores $\beta = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ em V, onde

$$\mathbf{u} = (1-a, 1+a) \text{ e } \mathbf{v} = (1+a, 1-a).$$

Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$ para que β não seja uma base de V.

9. Sejam $V = P_2(\mathbb{R})$ e $p = 2x^2 - 3x + 1 \in V$. O conjunto $\beta = \{p, p', p''\}$ é uma base de V?

10. Mostre que o conjunto

$$\beta = \{(1-x)^3, (1-x)^2, 1-x, 1\}$$

é uma base de $P_3(\mathbb{R})$.

11. Seja $V = \mathbb{R}^4$. Quais dos subconjuntos abaixo são bases de V?

(a) $\{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(1,0,0,1)\}$.

(b) $\{(1,3,-2,4),(1,1,5,9),(2,0,-13,23),(1,5,1,-2)\}$.

(c) $\{(1,1,1,1),(3,2,0,3),(0,-1,0,3),(4,2,1,7)\}$.

Assim,

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \left([I]_{\beta'}^{\beta}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} (a,b) &= \frac{1}{2}(1,2) + \frac{1}{2}(3,-6) = (2,-2) \\ (c,d) &= \frac{1}{2}(1,2) - \frac{1}{2}(3,-6) = (-1,4). \end{aligned}$$

Portanto, $\beta' = \{(2,-2),(-1,4)\}$.

EXERCÍCIOS

---

1. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(2,1),(1,-1)\}$ um conjunto de vetores em V. Mostre que β é uma base de $\mathbb{R}^2$ e calcule $[(4,-1)]_{\beta}$ e $[(x,y)]_{\beta}$.

2. Seja $V = \mathbb{R}^2$. Calcule $[(6,2)]_{\beta}$ e $[(x,y)]_{\beta}$, onde
   (a) $\beta = \{(2,1),(1,-1)\}$.
   (b) $\beta = \{(2,0),(0,-1)\}$.
   (c) $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$
   (d) $\beta = \{(2,1),(1,2)\}$.

3. Sejam $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u} = (a,b)$ e $\mathbf{v} = (c,d)$ vetores em V tais que
   $$ac + bd = 0 \text{ e } a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1.$$
   Mostre que $\beta = \{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ é uma base ordenada de V. Além disso, calcule $[(x,y)]_{\beta}$.

4. Sejam $V = P_3(\mathbb{R})$ e $\beta = \{(1-x)^3,(1-x)^2,1-x,1\}$ uma base ordenada de V. Determine $[-x^2-2x+3]_{\beta}$.

5. Determine a matriz de mudança de base da base $\beta = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,3)\}$ para a base ordenada canônica de $\mathbb{R}^3$.

6. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ uma base ordenada de V. Determine $[(x,y,z)]_{\beta}$.

7. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $\alpha = \{(1,3),(2,-4)\}$ uma base de V. Se
   $$[\mathbf{I}]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -11 & 8 \end{bmatrix},$$
   então determine a base β.

8. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(3,5), (1,2)\}$ uma base de V. Se

$$[\mathbf{I}]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -11 \end{bmatrix},$$

então determine a base α.

9. Seja $V = \mathbb{R}^3$, $\alpha = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ e $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ bases ordenadas de V, onde

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_2 &= 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3. \end{aligned}$$

Determine as matrizes de mudança de bases de α para β e de β para α.

10. Considere os dados do exercício anterior. Se $[\mathbf{v}]_\alpha^t = [\ 1 \quad 1 \quad 2\ ]$, então determine $[\mathbf{v}]_\beta$.

11. A matriz de mudança de base da base α de $\mathbb{R}^2$ para a base $\beta = \{(1,1), (0,2)\}$ é

$$[\mathbf{I}]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Determine a base α.

12. Sejam

$$\alpha = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}, \beta = \{-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\} \text{ e } \gamma = \{2\mathbf{e}_1, 2\mathbf{e}_2\}$$

bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Se $[\mathbf{u}]_\beta^t = [\ -1 \quad 3\ ]$, então determine $[\mathbf{u}]_\alpha$ e $[\mathbf{u}]_\gamma$.

13. Sejam $V = \mathbb{R}^3$,

$$\alpha = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \text{ e } \beta = \{\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3\}$$

bases ordenadas de V. Determine $[\mathbf{I}]_\beta^\alpha$, $[\mathbf{I}]_\alpha^\beta$ e $[\mathbf{I}]_\beta^\alpha \cdot [\mathbf{I}]_\alpha^\beta$.

14. Sejam

$$\alpha = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \beta = \{-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\} \text{ e } \gamma = 2\alpha$$

bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$. Se $[\mathbf{u}]_\beta^t = [\ -1 \quad 3 \quad 1\ ]$, então determine $[\mathbf{u}]_\alpha$ e $[\mathbf{u}]_\gamma$.

15. Sejam V um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{R}$ e α uma base ordenada de V. Determine $[\mathbf{I}]_\alpha^\alpha$.

16. Seja

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.