ANÁLISE FUNCIONAL 2011.1 - LISTA DE EXERCÍCIOS 05

Sobre operadores compactos e teoria espectral

1. Seja $T : l^2 \times l^2 \to l^2 \times l^2$ definido por $T(x, y) = (0, y)$. Mostre que T não é compacto.

2. Seja H um espaço de Hilbert e fixe $y, z \in H$ não nulos. Mostre que $T : H \to H$ definido por
$$T(x) = (x, y)z,$$
é compacto. Determine T^*.

3. Mostre que o operador $T : l^p \to l^p$, $1 \leq p \leq \infty$ definido por
$$Tx = (\frac{x_1}{1}, ..., \frac{x_n}{n}, ...)$$
é compacto

4. Seja (x_n) uma base ortogonal em um espaço de Hilbert H e (α_n) uma sequencia limitada. Prove que o operador $T : H \to H$ definido por
$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x, x_n \rangle x_n,$$
é limitado com $\|T\| \leq \sup_n |\alpha_n|$. Se $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ então T é compacto. Mostre que para $n \neq m$, tem-se
$$\|Tx_n - Tx_m\|^2 = |\alpha_n|^2 + |\alpha_m|^2.$$
Usando isto, prove que se $\lim_{n\to\infty} \alpha_n \neq 0$ então T não é compacto.

5. Seja $K \in C([0, 1] \times [0, 1], \mathbb{R})$ e considere o operador linear $T : C([0, 1], \mathbb{R}) \to C([0, 1], \mathbb{R})$ definido por:
$$T(f)(t) = \int_0^1 K(s, t)f(s)ds.$$
Mostre que T é limitado. Mostre que T é compacto.

6. Verifique que se $T : H \to H$ um operador compacto e (e_n) uma sequencia ortonormal em H então $T(e_n) \to 0$.

7. Verifique que o operador $T : l_2 \to l_2$ definido por
$$T(x_1, x_2, ...) = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, ...)$$
não é compacto.

8. Seja E um espaço de dimensão infinita e $T : E \to E$ um tranformação linear isométrica. Mostre que T não pode ser compacto(use o lemma de Riesz).

9. Mostre que se $T \in \mathcal{L}(E, F)$ for compacto então $R(T)$ é um espaço separável.

10. Seja H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{K}(H)$. Mostre que $R(T)$ e $N(T)^{\perp}$ são separáveis.

11. Seja $T \in \mathcal{K}(E)$. Mostre que $\dim N(T)$ é finita e $R(I - T)$ é fechado.

12. Seja X um espaço topológico, F um espaço de Banach e $T : X \to F$ uma aplicação contínua tal que $T(X)$ seja relativamente compacto em E. Mostre que para todo $\varepsilon > 0$ existe uma aplicação $T_\varepsilon : X \to F$ contínua de posto finito tal que
$$\|T_\varepsilon x - Tx\| < \varepsilon.$$

13. Sejam E e F espaços de Banach , $T \in \mathcal{K}(E, F)$ e (S_n) em $\mathcal{L}(E, F)$ limitada tal que
$$S_n x \to Sx, \quad \forall x \in E,$$
onde $S \in \mathcal{L}(E, F)$. Mostre que $\|S_n T - ST\| \to 0$.

14. Use o exercício anterior para mostrar que todo operador $T \in \mathcal{K}(E, H)$, onde H é um espaço de Hilbert sepáravel pode ser aproximado por uma sequencia de operador de posto finito.

15. Sejam E, F espaços de Banach tal que F possui base de Schauder. Se $T \in \mathcal{K}(E, E)$ mostre que T pode ser aproximado por uma sequencia de operadores de posto finito.

16. Se $T \in K(E)$ e $\lambda \neq 0$ defina $A = I - \lambda T$. Note que $N(A^n) \subseteq N(A^{n+1})$ e $R(A^n) \supseteq R(A^{n+1})$.

    a) Mostre que existem inteiros positivos m, n tais que $N(A^{n+1}) = N(A^n)$ e $R(A^{m+1}) = R(A^m)$. Além disso, $m = n$;

    b) Mostre que $E = N(A^n) \oplus R(A^n)$ onde n o menor inteiro como em a);

    c) Verifique que $X_1(\lambda) = N(A^n)$ e $X_2(\lambda) = R(A^n)$ são subespaços invariantes por T;

    d) Seja $T_i = T_{|X_i}$ $i = 1, 2$. Mostre que $\sigma(T_1) = \{\lambda\}$ e $\lambda \in \rho(T_2)$, ou seja, $T_2 - \lambda$ é bijeção.

    f) O número $\dim X_1(\lambda)$ é chamado de dimensão algébrica de λ e $\dim N(T - \lambda I)$ é chamado de dimensão geométrica de λ (que são as multiplicidades de λ as multiplicidades de λ como zeros do polinômio característico minimal, respectivamente em dimensão finita).

17. Determine o espectro e o resolvente do operador projeção $P : H \to M$ onde M é subespaço fechado do espaço de Hilbert H.

18. Seja $T : E \to E$ linear. Mostre que se $\dim E < \infty$ então $\sigma(T) = VP(T)$.

19. Um operador $A \in \mathcal{L}(E)$ é dito um operador de Fredholm se $R(A)$ é fechado, $\dim N(A) < \infty$ e $codim R(A) < \infty$. O número
$$ind(A) = \dim N(A) - codim R(A)$$
é chamado de index de Fredholm. Se $T \in K(E)$ verifique que $A = I - T$ é um operador de Fredholm e encontre $ind(I - T)$.

20. Encontre o índice de Fredholm dos operadores $T : l^2 \to l^2$ nos seguintes casos:

   a) $T(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$;

   b) $T(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$;

   c) $T(x_1, x_2, ...) = (0, x_2, x_3, ...)$;

21. Seja H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H)$ um operador auto-adjunto não-trivial.

   a) Mostre que
   $$\|T\| = \sup_{u \neq 0} \frac{|(Tu, u)|}{\|u\|^2}.$$

   b) Suponha que a norma seja atingida, ou seja, existe $u_0 \in H$ tal que
   $$\|T\| = \frac{|(Tu_0, u_0)|}{\|u_0\|^2}.$$
   Mostre que u_0 é um autovetor de T com $Tu_0 = \lambda u_0$, onde $\lambda = \pm\|T\|$. (sug:use que $|(x, y)| = \|x\|\|y\| \Leftrightarrow x$ é múltiplo de y).

   c) Assuma que $T \in \mathcal{K}(H)$. Mostre que $\lambda = \|T\|$ ou $\lambda = -\|T\|$ são autovalores de T.

22. Seja $T \in \mathcal{L}(H)$ um operador auto-adjunto e M um subespaço invariante por T. Mostre que $M^\perp$ é invariante por T.

23. Use o Teorema espectral para mostrar que todo operador linear auto-adjunto e compacto em um espaço de Hilbert é limite de uma seqüencia de operadores de posto finito.

24. Seja H um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador compacto. Se λ_k é um autovalor não nulo de T, o que podemos afirmar sobre a solubilidade da equação
   $$Tu - \lambda_k u = f,$$
   para $f \in H$ fixada.

25. Seja H um espaço de Hilbert e $f \in H^*$. Fixado $z \in H$ não nulo defina $T : H \to H$ por $Tx = f(x)z$. Mostre que T é compacto. Determine o espectro de T.

26. Seja $T \in \mathcal{K}(H)$ um operador positivo, ou seja, $(Tu, u) \geq 0 \ \forall u \in H$. Mostre que existe um operador positivo $S \in \mathcal{K}(H)$ tal que $S^2 = T$, que é denotado por $\sqrt{T}$ ou $T^{1/2}$. Mostre que este é único entre os operadores limitados positivos. (Usar o Teorema Espectral)

27. Seja E um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(E)$. Mostre que se T é invertível e $\lambda \in \sigma(T)$ então $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1})$.