ANÁLISE FUNCIONAL 2011.1 - LISTA DE EXERCÍCIOS 04

Sobre espaços de Hilbert

1. Prove a desigualdade de Cauchy-Schwarz: Se H é um espaço com produto interno $(\cdot,\cdot)$ então para todo $u, v \in H$ vale
$$|(u,v)| \leq \sqrt{(u,u)} \cdot \sqrt{(v,v)}$$

2. Prove que $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$ é norma em H sempre que H for espaço com produto interno $(\cdot,\cdot)$. Esta norma é a norma induzida em H pelo seu produto interno.

3. Prove a identidade do paralelogramo: Se H é um espaço com produto interno $(\cdot,\cdot)$ então para todo $u, v \in H$ vale
$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$$

4. Prove a recíproca do exercício acima: suponha que E é um espaço de Banach cuja norma satisfaz a identidade do paralelogramo. Mostre que
$$(u,v) = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$$
define um produto interno tal que $(u,u) = \|u\|^2$. Isto é o exercício 5.1 no livro do Brezis. Siga o roteiro e as dicas lá contidos.

5. Mostre que ℓ^p não é espaço de Hilbert se $p \neq 2$. (Dica: prove que a norma em ℓ^p não satisfaz a identidade do paralelogramo)

6. Seja $M \leq H$ subespaço vetorial fechado de um espaço de Hilbert H. Seja $P_M : H \to M$ dada por $P_M(x) = u$ tal que $\operatorname{dist}(x, M) = \|x - u\|$. Já vimos que P está bem definida (onde vimos?). Sobre esta função. prove que
   (a) $P_M \in \mathcal{L}(H, M)$.
   (b) $P_M^2 = P_M$.

7. Dado M subespaço fechado de um espaço de Banach X, dizemos que o subespaço fechado $N \subset X$ é o complementar topológico de M se $X = M \oplus N$ e as projeções de X em M e N são contínuas. Mostre que em um espaço de Hilbert todo subespaço vetorial fechado admite um complementar topológico. (Dica: dado M subespaço fechado, considere $N = \ker(P_M)$. Mostre ainda que N é o espaço ortogonal de M, isto é, $N = M^\perp$ e conclua o resultado.)

8. Dado $A \subset H$ definimos por $\langle A \rangle$ como o menor subespaço vetorial de H que contém A. Prove o seguinte critério de densidade: $\langle A \rangle$ é denso em H se e somente se $A^\perp = \{0\}$, onde $A^\perp = \{u \in H;\ (u,a) = 0\ \forall\ a \in A\}$.

9. Seja $T \in \mathcal{L}(H,H)$ com $\|T\| \leq 1$. Mostre que $N(I-T) = R(I-T)^{\perp}$ onde I é a identidade em H.

10. Sejam M e N subespaços fechados de H tais que $M \perp N$ (isto é $(u,v) = 0$ para todo $u \in M$ e para todo $v \in N$). Mostre que o subespaço vetorial $M+N$ é fechado em H.

11. (melhor aproximação) Seja $(x_n)_{n=1}^N$ um conjunto ortonormal em um espaço com produto interno H. Mostre que
$$\left\| x - \Sigma_{n=1}^N c_n x_n \right\|$$
é minimizada para $c_n = \langle x, x_n \rangle$.

12. Sobre relaçoes de ortogonalidade
    (a) Sejam u e v em H tais que $\|u\| = \|v\|$. Mostre que $u - v$ e $u + v$ são ortogonais.
    (b) A fim de que a e b em H sejam ortogonais, é necessário e suficiente que para todo $t \in \mathbb{R}$ tenhamos $\|a + tb\| \geq \|a\|$.
    (c) Seja $M \leq H$ subespaço vetorial. Mostre que $x \in M^{\perp}$ se e somente se $\|x - y\| \geq \|x\|$ para todo $y \in M$.

13. Usando apenas o teorema de representação de Riesz-Frechet, prove que todo espaço de Hilbert é reflexivo.

14. Usando apenas o teorema de respresentação de Riesz-Frechet, mostre que vale o "Teorema de Hahn-Banach para funcionais lineares contínuos em um espaço de Hilbert". Isto é, se M é subespaço fechado de H e $f \in M^*$ então existe $g \in H^*$ que estende f, preservando a norma.

15. Amplie o resultado do exercício 14 da seguinte forma: Se F é espaço de Banach e $S \in \mathcal{L}(G,F)$ então existe $T \in \mathcal{L}(H,F)$ que estende S e tal que $\|T\|_{L(H,F)} = \|S\|_{L(G,F)}$

16. Seja $a : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua e coerciva em H. Dado $u \in H$ mostre que o funcional $v \mapsto a(u,v)$ é linear e contínuo. Seja Au o elemento em H que representa este funcional. Mostre que o operador $A : H \to H$ está bem definido e pertence a $\mathcal{L}(H,H)$. Mostre ainda que vale $Au \geq \alpha\|u\|^2$ para alguma constante $\alpha > 0$.

17. Seja $T \in \mathcal{L}(H,H)$ Dado $u \in H$ então a função $v \mapsto (u, Tv)$ é linear e contínua. Pelo teorema de Riesz-Frechet existe único T^*u tal que $(u, Tv) = (T^*u, v)$. Prove que T^* define um operador em $\mathcal{L}(H,H)$ tal que $\|T^*\| = \|T\|$. Mostre ainda que $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$. Dizemos que T^* é o operador adjunto de T. Compare com a definição anterior de operador adjunto de um operador entre espaços de Banach.

18. Seja H um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador linear contínuo invertível. Mostre que se $f \in H^*$, então existe $y \in H$ tal que
$$f(x) = (T^*Tx, y), \quad \forall x \in H,$$
onde T^* é o operador adjunto de T.

19. Seja H um espaço de Hilbert. Mostre que $x_n \to x$ em H se, e somente se, $\|x_n\| \to \|x\|$ e $x_n \rightharpoonup x$. E não use a proposição 3.32 do livro do Brézis!!!

20. (Hellinger-Toeplitz) Seja $T : H \to H$ operador tal que $(Tu, v) = (u, Tv)$ para todo $u, v \in H$. Mostre que $T \in \mathcal{L}(H, H)$. Conclua que $T^* = T$, ou seja, o operador é auto-adjunto.

21. Seja (e_n) uma base ortornormal para H. Mostre que

    (a) Mostre que $e_n \rightharpoonup 0$ fracamente em H.

    (b) Seja (α_n) uma sequência limitada em $\mathbb{R}$ e tome $u_n = \dfrac{1}{n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Mostre que

    i. $\|u_n\| \to 0$;

    ii. $\sqrt{n} u_n \rightharpoonup 0$.

22. (Lema de Riemann-Lebesgue) Seja $L^2[0,\pi] := \{f : [0,\pi] \to \mathbb{R}\, \text{mensurável} : \int_0^\pi |f(x)|^2 dx < \infty\}$. Defina um produto em $L^2[0,\pi]$ por:

$$(f, g) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)g(x)dx.$$

Mostre que a sequencia $f_n(t) = sen(nt)$ forma um conjunto ortonormal em L^2. Use isto para mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f(x) sen(nx) dx = 0.$$

23. Seja (e_k) uma base ortonormal em um espaço de Hilbert separavel H e defina:

$$|||u||| := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} |(u, e_k)|.$$

a) Mostre que $|||u||| \leq \|u\|$. Se (u_n) e limitada em H, então

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{fracamente em} \quad (H, \|\cdot\|) \quad \Leftrightarrow \quad u_n \to u \quad \text{fortemente em} \quad (H, |||\cdot|||).$$

b) O espaço H com a norma $|||.|||$ não é completo. Note que $e_k \to 0$ em $|||.|||$ entretanto, $e_k \not\to 0$ em $\|.\|$. Se fosse completo as normas seriam equivalentes.