TOPOLOGIA GERAL 2010.2 - LISTA DE EXERCÍCIOS 03

Exercício 1 Seja $Y \subset X$ espaçoes topológicos conexos. Mostre que se A e B formam uma separação para $X \backslash Y$ (isto é, $X \backslash Y = A \cup B$ com A e B abertos de $X \backslash Y$, disjuntos e não-vazios) então $Y \cup A$ e $Y \cup B$ são conexos.

Exercício 2 Mostre que se X é espaço métrico e $K \subset X$ é compacto, então K é limitado (segundo a métrica em X) e fechado. Mostre que a recíproca não é verdadeira, exibindo um espaço métrico e um conjunto limitado, fechado e não-compacto neste espaço.

Exercício 3 Seja $f : X \to Y$ e Y espaço topológico compacto e Hausdorff. Mostre que

$$f \ \text{ é contínua } \quad \Leftrightarrow \quad G_f \equiv \{(x, f(x));\ x \in X\} \ \text{ é fechado em } \ X \times Y.$$

Exercício 4 Seja X espaço de Hausdorff compacto e $\mathcal{A}$ uma coleção de conjuntos fechados e conexos de X completamente ordenados pela relação de inclusão. Prove que $Y = \cap_{A \in \mathcal{A}} A$ é conexo.

Exercício 5 Seja G um grupo topológico, A fechado e B compacto em G. Mostre que

$$A \cdot B = \{ab;\ a \in A,\ b \in B\} \ \text{ é fechado.}$$

Exercício 6 Dizemos que A é um conjunto G_δ se A é a interseção enumerável de conjuntos abertos de X. Sejam A e B fechados disjuntos de um espaço normal X. Prove que

$$\big(\exists\ f : X \to [0,1] \ \text{ contínua com } \ f^{-1}(\{0\}) = A \ \text{ e } \ f(B) = 1\big) \quad \Leftrightarrow \quad A \ \text{ é } \ G_\delta.$$

Este resultado é chamado a formulação forte do Lema de Uryshon.