ANÁLISE FUNCIONAL 2011.1 - LISTA DE EXERCÍCIOS 03

Sobre topologias em espaços normados.

Em toda esta lista, E, F e G são espaços de Banach.

1. Topologia produto.

   (a) Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Podemos definir uma topologia no conjunto $X \times Y$ da seguinte forma: Considere $\beta = \{U \times V;\ U$ é aberto de X e Vé aberto de $Y\}$. Mostre que β define uma base para topologia em $X \times Y$. A topologia produto, denotada por $\tau_X \times \tau_Y$, é a topologia gerada por esta base. Isto é, é a topologia cujos abertos são uniões arbitrárias de elementos de β.

   (b) Podemos definir duas "topologias fracas"(aparentemente) distintas em $E \times F$. A topologia fraca $\tau(E \times F, (E \times F)^*)$ (gerada pelos funcionais lineares contínuos na topologia da norma do espaço de Banach $E \times F$) e a topologia produto (definida no item a) $\tau(E, E^*) \times \tau(F, F^*)$. Mostre que estas topologias são iguais.

2. Mostre que se $\dim E = \infty$ então qualquer vizinhança da origem na topologia fraca contém um subespaço vetorial de dimensão finita.

3. Prove as dilatações $x \mapsto \lambda x$ e as translações $x \mapsto x + c$ são homeomorfismos de E na topologia fraca. Prove ainda que dilatações e translações em E^* também são homeomorfismos na topologia fraca-*.

4. Seja (x_n) uma sequência em $\ell^p(\mathbb{R})$, $x_n = (\xi_m^n)_{m\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{R})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Mostre que $x_n \rightharpoonup x = (\xi_m)$ se e somente se:

      i. $(\|x_m\|)$ é limitada em $\mathbb{R}$.

      ii. para cada m, $\xi_m^n \to \xi_m$ quando $n \to \infty$.

   (b) Seja $x_n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots)$ onde 1 está na n-ésima posição. Mostre que $x_n \rightharpoonup 0$ mas (x_n) **não** converge forte para 0.

   (c) Para esta sequência definida em (b), defina $F = \{x_n + nx_m;\ m > n\}$. Mostre que a distância entre dois elementos de F é pelo menos 1; conclua que F é fechado na topologia da norma.

   (d) Mostre que a sequência nula pertence ao fecho fraco de F, mas prove que não existe (z_n) em F tal que $z_n \rightharpoonup 0$. Por que isto não é contraditório?

5. Mostre que, em $\ell^1(\mathbb{R})$, convergência fraca e convergência forte são equivalentes.

6. Provar as proposições 3.12 e 3.13 no livro do Brézis versão inglesa.

7. Seja $T : E \to F$ linear. Mostre que se $T : (E, \tau_{\|\cdot\|}) \to (F, \tau(F, F^*))$ é contínua então $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

8. Seja (f_n) sequência em E^* tal que para cada $x \in E$ $f_n(x)$ é convergente. Mostre que existe $f \in E^*$ tal que $f_n \rightharpoonup^* f$ na topologia fraca-* de E^*.

9. Seja $\phi : (E^*, \tau(E^*, E)) \to \mathbb{R}$ um funcional linear. Mostre que ϕ é contínuo na topologia fraca-* se e somente se existe $V \in \tau(E^*, E)$ vizinhança da origem tal que $\sup_{f \in V} |\phi(f)| < \infty$.

10. Mostre que se $V \in \tau(E^*, E)$ e $f_0 \in E^*$ então $f_0 + V \in \tau(E^*, E)$.

11. Seja X espaço normado.

    (a) Dizemos que uma sequência (x_n) é fracamente de Cauchy em X se $(f(x_n))$ for sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ para toda $f \in X^*$. Mostre que toda sequência fracamente de Cauchy é limitada.

    (b) X é dito fracamente completo se toda sequência fracamente de Cauchy for fracamente convergente. Mostre que se X é reflexivo então é X é fracamente completo.

12. Mostre que o operador $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$, adjunto de $T \in (E, F)$ (definido nas listas anteriores) é contínuo mesmo com F^* e E^* munidos da topologia fraca-*.

13. Seja C um subconjunto de E compacto na topologia fraca $\tau(E, E^*)$. Prove que C é limitado na topologia forte de E.

14. Exercício 3.8 do livro do Brézis, versão em inglês.

Sobre espaços reflexivos

1. Seja E um espaco de Banach reflexivo. Prove que $K \subset E$ é compacto na topologia fraca $\tau(E, E^*)$ se, e somente se, é fracamente fechado em $\tau(E, E^*)$ e limitado.

2. Seja E um espaço reflexivo e (x_n) em E tal que $(f(x_n))$ converge para todo $f \in E'$. Mostre que existe $x \in E$ tal que $x_n \rightharpoonup x$. Compare com o exercício 8. Construa um exemplo de espaço não-reflexivo onde falha este fato. Dica: em c_0, tome $x_n = (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$ onde o último 1 está na n-ésima posição.

3. Seja E um espaço de Banach uniformemente convexo. Se $x_n \rightharpoonup x$ e $\|x_n\| \to \|x\|$ então $x_n \to x$.

4. Seja $J :\to E^{**}$ a injeção canonica. Mostre $J(E)$ é fechado. Assuma que E^* seja reflexivo e mostre que $J(E) = E^{**}$. Use separação de convexos.

5. Mostre que E é reflexivo se, e só se, E^* é reflexivo.