ANÁLISE FUNCIONAL 2011.1 - LISTA DE EXERCÍCIOS 02

Sobre o Princípio da Limitação Uniforme, Teorema da Aplicação Aberta, da Aplicação Inversa e do Gráfico Fechado.

1. Use o Lema de Baire para provar que nenhum espaço de Banach de dimensão infinita admite base de Hamel enumerável.

2. Suponha que $x_n \rightharpoonup x$ em E, espaço de Banach (isto é: $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in E^*$). Mostre que x_n é sequência limitada e vale $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

3. Sejam E e F espaços de Banach e seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$ sobrejetiva.
   (a) Dada (y_n) limitada em Y mostre que existe (x_n) limitada em X tal que $Tx_n = y_n$.
   (b) Dada (y_n) em Y com $y_n \to 0$, mostre que existe (x_n) em X com $x_n \to 0$ e $Tx_n = y_n$.

4. Sejam X espaço de Banach e Y espaço normado. Seja (T_n) sequência de operadores em $\mathcal{L}(X, Y)$ tal que para cada $x \in X$ temos que $(T_n x)$ é sequência de Cauchy em Y. Mostre que $(\|T_n\|)$ é limitada. Se Y for Banach, conclua que existe $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $T_n x \to Tx$ em Y.

5. Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas em E de forma que o tornam espaços de Banach. Mostre que se existe $C > 0$ de forma que
$$\|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \quad \forall x \in X$$
então estas normas são equivalentes.

6. Seja E espaço de Banach. Seja (x_n) uma sequência em E tal que $x_n \rightharpoonup 0$ (ou seja, $f(x_n) \to 0$ para toda $f \in E^*$). Considere a aplicação $T : E^* \to c_0$ (onde $c_0 = \{(t_n) \subset \mathbb{R};\ t_n \to 0\}$, com a norma do sup) tal que $Tf = (f(x_n))$. Mostre que $T \in \mathcal{L}(E^*, c_0)$ (obs: será que o Teorema do Gráfico Fechado realmente ajuda, ou daria para provar continuidade diretamente?).

7. Seja E espaço de Banach. Seja (x_n) uma sequência em E tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| < \infty$ para todo $f \in E^*$. Considere a aplicação $T : E^* \to \ell^1(\mathbb{R})$ tal que $Tf = (f(x_n))$. Mostre que $T \in \mathcal{L}(E^*, \ell^1(\mathbb{R}))$.

8. Seja $I : \big(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big) \to \big(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1\big)$ a identidade. Mostre que esta aplicação é contínua mas não é aberta, apesar de ser sobrejetora (obviamente). Isto contradiz o Teorema da Aplicação Aberta?

9. Seja $c_{00} = \{(x_n) \subset \mathbb{R};\ x_n \neq 0 \text{ apenas para uma quantidade finita de n's } \}$ munido da norma do sup $\|(x_n)\| = \max_n |x_n|$. Defina $T : c_{00} \to c_{00}$ dada por
$$T(x_n) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots\right).$$
Mostre que T é linear invertível mas T^{-1} não é contínuo. Isto não contradiz o Teorema da Aplicação Inversa?

10. Defina $D : C^1([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$ ambos munidos da norma do sup, tal que $Df = f'$. Mostre que D não é contínuo, apesar de possuir gráfico fechado. Isto contradiz o Teorema do Gráfico Fechado?

11. O objetivo deste exercício é mostrar que o espaço dos polinômios reais

$$\mathcal{P} = \{x(t) = \sum \alpha_j t^j; \quad \alpha_j = 0 \ \forall\ j \geq n, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$$

munido da norma do sup $\|x(t)\| = \max_j |\alpha_j|$, não é completo. Mostre que existe uma sequência $(f_n) \in \mathcal{P}^*$ tal que para cada $x(t) \in \mathcal{P}$ existe $c_x \geq 0$ tal que $|f_n(x(t))| \leq c_x$ mas $\|f_n\| \to \infty$ (ou seja, não vale o Princípio da limitação uniforme em $\mathcal{P}^*$ e portanto $\mathcal{P}$ não pode ser Banach).

12. Mostre a equivalência dos três teoremas: Teorema da Aplicação Aberta, Teorema da Aplicação Inversa e Teorema do Gráfico Fechado.

13. Dado $f \in E^*$ denote $f(x)$ por $\langle f, x\rangle$. Seja um espaço de Banach E e $T : E \to E^*$ um operador linear satisfazendo $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in E$. Mostre que $T \in \mathcal{L}(E, E^*)$.

14. Na mesma notação do exercício anterior, suponha que $T : E \to E^*$ é tal que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle Ty, x\rangle \ \ \forall\ x, y \in E.$$

Então $T \in \mathcal{L}(E, E^*)$.

15. Sejam E_1, E_2, E_3 espaços de Banach e $A_1 \in \mathcal{L}(E_1, E_3)$, $A_2 \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$. Se para cada $x \in E_1$ a equação

$$A_2(y) = A_1(x)$$

tem uma única solução $y = Ax$, mostre que $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Sugestão: Mostre que A é linear e prove que seu gráfico é fechado.