TOPOLOGIA GERAL 2010.2 - LISTA DE EXERCÍCIOS 02

Exercício 1 Sejam X e X' o mesmo conjunto munido de duas topologias diferentes, τ e τ' respectivamente. Seja $i : X \to X'$ a identidade.

(a) Mostre que i é contínua se e somente se τ é mais fina que τ'.

(b) Conclua, do item (a) que i é homeomorfismo se e somente se $\tau' = \tau$.

(c) Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo considere em $\mathbb{R}$ a topologia τ_n gerada pela base $\beta_n = \{\{n\}\} \cup \beta$ onde β é a base da topologia usual de $\mathbb{R}$. Mostre que $\tau_1 \neq \tau_2$ e apesar disto, encontre um homeomorfismo entre $(\mathbb{R}, \tau_1)$ e $(\mathbb{R}, \tau_2)$. (Ou seja, afim de que as topologias sejam iguais, é necessário que o homeomorfismo seja a própria identidade)

Exercício 2 Sejam X,Y espaços topológicos com Y espaço de Hausdorff. Sejam f,$g : X \to Y$ funções contínuas. Prove que o conjunto $C_1 = \{x \in X; f(x) = g(x)\}$ é fechado em X. Suponha que Y seja totalmente ordenado com a topologia da ordem. Mostre que o conjunto $C_2 = \{x \in X; f(x) \leq g(x)\}$ também é fechado. Prove ainda que a função $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ é contínua.

Exercício 3 Seja $\{C_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma família indexada de subconjuntos de um espaço topológico X tal que $X = \bigcup_{\alpha \in J} C_\alpha$. Suponha que $f : X \to Y$, Y espaço topológico, é tal que $f\big|_{C_\alpha}$ é contínua para todo $\alpha \in J$.

(a) Mostre que se J for finito e a coleção for de conjuntos fechados então f é contínua.

(b) Encontre um exemplo onde J é enumerável, cada A_α é fechado e mesmo assim f não é contínua.

(c) A coleção acima é dita ser "localmente finita" se cada ponto $x \in X$ possui uma vizinhança que intercepta apenas uma quantidade finita de A_α's nessa coleção. Mostre que com essa propriedade, se cada A_α for fechado então f é contínua, qualquer que seja o conjunto de índices J.

Exercício 4 Definição: Um espaço topológico (X, τ) é dito um grupo topológico se X é um grupo e as aplicações: $p : X \times X \to X$ tal que $(g, h) \mapsto gh$ e $(\cdot)^{-1} : X \to X$ tal que $g \mapsto g^{-1}$, são contínuas.

(a) Prove que para cada $a \in X$ as aplicações translação à direita e translação à esquerda, dadas por $L_a : X \to X$ com $L_a(g) = ag$ e $R_a : X \to X$ com $R_a(g) = ga$, são homeomorfismos. Prove que $(\cdot)^{-1}$ também é homeomorfismo.

(b) Seja e a identidade do grupo G. Prove para cada U vizinhança de e existe uma outra vizinhança V tal que

(i) $V = V^{-1}$;

(ii) $V^2 \subset U$;

onde $V^{-1} = \{v^{-1}; v \in V\}$ e $V^2 = \{v_1 v_2;\ v_1, v_2 \in V\}$.

(c) Suponha que em X todo conjunto unitário é fechado. Prove que X é Hausdorff. (obs: já vimos que num espaço topológico qualquer, a propriedade de ser Hausdorff implica que todo unitário é fechado. No caso de grupo topológico, temos a recíproca. Essa recíproca não é verdade em espaços topológicos mais gerais.) Sugestão: supondo que $x \neq y$ então $xy^-1 \neq e$ e portanto $X \backslash \{xy^{-1}\}$ é vizinhança de e. Continue esse raciocínio utilizando agora o item (b).

Exercício 5 Considere o cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ e a aplicação $\psi : R^2 \to S^1 \times R$ dada por $\psi(s,t) = (\psi(s), t)$ onde $\psi(s) = (\cos 2\pi s, \mathrm{sen} 2\pi s)$. Mostre que ψ é homeomorfismo local. Conclua que o cilindro é naturalmente homeomorfo a $\mathbb{R}^2/E$ onde E é a relação de equivalência $(x,y)E(x',y') \Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}$ e $y = y'$.

Exercício 6 Sejam A um conjunto, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma família indexada de espaços topológicos e $\{f_\alpha\}$ uma família de funções $f_\alpha : A \to X_\alpha$, indexadas pelo mesmo conjunto de índices.

(a) Considere $\mathcal{S}_\beta = \{f_\beta^{-1}(U_\beta); U_\beta$ é aberto em $X_\beta\}$ e $\mathcal{S} = \bigcup_{\beta \in J} \mathcal{S}_\beta$. Prove que $\mathcal{S}$ é sub-base para uma topologia em A.

(b) Mostre que a topologia em A gerada por essa sub-base é a menor possível para a qual todas as aplicações f_α são contínuas. Compare essa topologia com a topologia produto, quando $A = \prod_\alpha X_\alpha$ e a família de funções são as projeções $f_\alpha = \pi_\alpha$.

(c) Mostre que uma função $g : Y \to A$ é contínua se e somente se $f_\alpha \circ g$ é contínua para todo α.

(d) Seja $f : A \to \prod_\alpha X_\alpha$ definida por $f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha \in J}$. Mostre que a imagem de abertos de A são abertos em $f(A)$.