ANÁLISE FUNCIONAL 2011.1 - LISTA DE EXERCÍCIOS 01

Sobre espaços normados e transformações lineares limitadas.

Exercício 1 Seja X espaço normado e $Y \leq X$ subespaço vetorial tal que $\text{int}Y \neq \emptyset$. Prove que $Y = X$. ($\text{int}A = \{x \in A;\ \exists r > 0 \text{ tal que } B_X(x,r) \subset A\}$)

Exercício 2 Sejam X, Y dois espaços normados e $\mathcal{L}(X,Y) = \{T : X \to Y;\ T \text{ é linear e limitada }\}$. Definindo $\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y/\|x\|_X;\ 0 \neq x \in X\}$, prove que

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y;\ x \in X,\ \|x\|_X \leq 1\} = \sup\{\|Tx\|_Y;\ x \in X,\ \|x\|_X < 1\} = \sup\{\|Tx\|_Y;\ x \in X,\ \|x\|_X = 1\}.$$

Exercício 3 Dê um exemplo de um espaço normado X e um funcional linear $f : X \to \mathbb{R}$ descontínuo.

Exercício 4 Sejam X, Y dois espaços normados e $T : X \to Y$ sobrejetiva e limitada tal que existe $b > 0$ satisfazendo $\|Tx\|_Y \geq b\|x\|_X$ para todo $x \in X$. Mostre que T é invertível e $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.

Exercício 5 Prove que um espaço normado X é Banach se e somente se para toda sequência (x_n) em X tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, existe $x \in X$ tal que

$$\lim_{N\to\infty} \left\| x - \sum_{n=1}^{N} x_n \right\| = 0$$

(denotamos tal x por $x = \sum_{x=1}^{\infty} x_n$.)

Exercício 6 Seja E espaço de Banach. Dado $T \in \mathcal{L}(E,E) \equiv \mathcal{L}(E)$, podemos definir a composição $T \circ T \equiv T^2$, e indutivamente $T^{n+1} = T \circ T^n$. Mostre que $T^n \in \mathcal{L}(E)$. Estime a norma de T^n. Se $\|T\| < 1$, mostre que $I - T$ é invertível, onde $I : E \to E$ é a identidade. (Dica: definina $S_n = \sum_{i=0}^{n} T^i$ (convenção: $T^0 = I$), mostre que S_n é convergente em $\mathcal{L}(E)$, usando o exercício anterior. Denote $\lim S_n = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$. Mostre que $(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.)

Exercício 7 Se $S, T \in \mathcal{L}(E)$ são tais que T é invertível e $\|T - S\| < 1/\|T^{-1}\|$ então S é invertível (sugestão: adapte o exercício anterior). Conclua portanto que o conjunto dos operadores invertíveis de $\mathcal{L}(E)$ é aberto em $\mathcal{L}(E)$.

Exercício 8 Seja $R : \ell^p(\mathbb{R}) \to \ell^p(\mathbb{R})$ tal que $R(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$. Mostre que $R \in \mathcal{L}(\ell^p(\mathbb{R}))$, R é injetivo mas não é sobrejetivo. R é chamado de shift à direita. Defina também o shift a esquerda, $L(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$. Mostre que $L \in \mathcal{L}(\ell^p(\mathbb{R}))$, L é sobrejetivo mas não é injetivo.

Exercício 9 Demonstre o Lema de Riesz: Se $Y \leq X$ é subespaço próprio e fechado do espaço normado X então para todo $0 < \theta < 1$ existe $x \in X$ com $\|x\| = 1$ e $\|x - y\| \geq \theta$ para todo $y \in Y$.

Exercício 10 Dado X espaço normado e M subespaço vetorial fechado de X, considere a seguinte relação de equivalência em X: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in M$ (verifique as condições para que $\sim$ de fato seja relação de equivalência). Considere o espaço quociente $X/M = \{[x];\ x \in X\}$ onde $[x] = \{y \in X;\ x \sim y\}$. Em X/M

defina as operações $+$ e produto por escalar: $[x]+[y]=[x+y]$ e $\lambda[x]=[\lambda x]$. Mostre que as operações estão bem definidas e que X/M é esp. vetorial com estas operações. Defina ainda $\|[x]\| = \inf_{m\in M} \|x+m\|$. Mostre que X/M é espaço normado com esse funcional. Mostre que se X é Banach então X/M também é Banach.

Exercício 11 Seja $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ sobrejetiva. Defina em $X/\ker(T)$ a função $\tilde{T}[x] = Tx$. Mostre que $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X/\ker(T), Y)$, $\tilde{T}$ é bijetiva e $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Exercício 12 Seja $c_0 = \{(x_n) \subset \mathbb{R};\ x_n \to 0\}$. Mostre que c_0 é subespaço fechado de $\ell^\infty(\mathbb{R})$. Mostre que existe um isomorfismo isométrico $T : c_0^* \to \ell^1(\mathbb{R})$ ($T : X \to Y$ é isomorfismo isométrico se é sobrejetiva e $\|T_x\|_Y = \|x\|_X$ para todo $x \in X$).

Exercício 13 Se $T_n \to T$ em $\mathcal{L}(X,Y)$ então mostre que para todo $x \in X$ temos que $T_n x \to Tx$ em Y. Mostre que a recíproca geralmente não ocorre (ou seja, convergência pontual não necessariamente implica em convergência em norma). Dica: considere $T_n : c_0 \to \mathbb{R}$ dada por $T_n(x_m) = x_n$.

Exercício 14 Considere $C([0,1],\mathbb{R})$ com a norma do sup: $\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Considere $A : C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$ de forma que $Au : [0,1] \to R$ é tal que $Au(y) = \int_0^1 K(x,y)u(x)dx$ para algum $K \in C([0,1]\times[0,1],\mathbb{R})$. Mostre que o operador A é (linear) limitado e calcule $\|A\|$.

Aplicações dos Teoremas de Hahn-Banach

Exercício 15 Seja E espaço normado. Mostre que se $x, y \in X$ são tais que $f(x) = f(y)$ para todo $f \in E^*$ então $x = y$.

Exercício 16 Mostre que se $F \leq E$ é subespaço de E tal que $\overline{F} \neq E$ então existe $f \in E^*$ tal que $f \neq 0$ e $f(y) = 0$ para todo $y \in F$. Ou seja, uma condição necessária e suficiente para que F seja subespaço denso em E é provar que o único funcional linear contínuo que se anula em todo F é o funcional nulo.

Exercício 17 No exercício anterior, troque o fato de F ser subespaço vetorial por F ser apenas um conjunto convexo e conclua o mesmo resultado.

Exercício 18 Sejam $Y \leq X$ tais que X é normado e Y é fechado e propriamente contido em X. Se $x_0 \neq Y$ é tal que $\operatorname{dist}(x_0, Y) \equiv \inf_{y\in Y} \|x_0 - y\| = \delta > 0$ então existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$, $f(x_0) = \delta$ e $f(y) = 0$ para todo $y \in Y$. Perceba que este resultado é bem melhor que o estabelecido no exercício 16.

Exercício 19 Sejam X, Y espaços normados e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Definimos $T^* : Y^* \to X^*$ da seguinte forma: Se $g \in Y^*$ então $T^*g(x) = g(Tx)$. Mostre que $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ e ainda $\|T\| = \|T^*\|$.

Exercício 20 Dado M subespaço vetorial do espaço normado X, defina $M^\perp = \{f \in X^*;\ f(x) = 0\ \forall\, x \in M\}$. Analogamente, se N é subespaço vetorial de X^* defina $N^\perp = \{x \in X;\ f(x) = 0\ \forall\, f \in N\}$. Dado $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ mostre que $\ker(T) = (\operatorname{im}(T^*))^\perp$ e analogamente $\ker(T^*) = (\operatorname{im}(T))^\perp$

Exercício 21 Dizemos que uma sequência (x_n) num espaço normado X converge fracamente para x (notação $x_n \rightharpoonup x$) se para todo $f \in X^*$ temos $f(x_n) \to f(x)$. Prove que nestas condições, o limite fraco de uma sequência fracamente convergente é único.

Exercício 22 (Lema de Mazur) Suponha que $x_n \rightharpoonup x$ em um espaço normado X (convergência fraca, definida no exercício anterior). Prove que existe uma sequência (ψ_m) de combinações lineares finitas destes x_n's tal que $\psi_m \to x$. Dica: Considere Y o subespaço gerado por todos os x_n's. Suponha que x não está em $\overline{Y}$ e use Hahn-Banach segunda forma geométrica, chegando em um absurdo com o fato de que $x_n \rightharpoonup x$.

Exercício 23 (Extensão de funções lineares) Seja E espaço normado e $G \leq E$. Seja $g \in \mathcal{L}(G, \mathbb{R}^n)$. Mostre que existe $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n)$ com $f(x) = g(x)$ para todo $x \in G$ e $\|f\|_{E^*} = \|g\|_{G^*}$

Exercício 24 Refaça o exercício 23 com $\ell^\infty(\mathbb{R})$ no lugar de $\mathbb{R}^n$.

Exercício 25 Dizemos que um espaço normado E é separável se existe um subconjunto enumerável $F \subset E$ tal que $\overline{F} = E$. Mostre que se X^* é separável então X é separável. Sugestão: tome um subconjunto enumerável e denso na esfera unitária de X^*. Para cada elemento f_n nesse subconjunto, tome $x_n \in X$ tal que $f_n(x_n) \geq 1/2$ com $\|x_n\| = 1$. Mostre que o espaço vetorial gerado por todos estes x_n tem que ser todo o X.

Exercício 26 Prove o Teorema de Hahn-Banach sem usar o lema de Zorn para o caso em que X for espaço vetorial de dimensão finita.

Exercício 27 Sejam $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ um conjunto linearmente independente, X espaço normado e $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$. Mostre que existe $f \in X^*$ tal que $f(x_i) = a_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Exercício 28 Mostre que se X possui um conjunto com n vetores linearmente independentes, então X^* também o possui.

Exercício 29 Prove, com algum exemplo, que a extensão de um funcional linear contínuo definido num subespaço de um espaço normado pode não ser única.