TOPOLOGIA GERAL 2010.2 - LISTA DE EXERCÍCIOS 01

Exercício 1 Seja X um conjunto e (τ_α) uma famílina de topologias em X. Mostre que $\bigcap_\alpha \tau_\alpha$ é uma topologia em X. O que dizer de $\bigcup_\alpha \tau_\alpha$? Se β é base para uma topologia em X, mostre que τ_β (a topologia gerada por β) é a interseção de todas as topologias de X que contêm β.

Exercício 2 Mostre que a coleção

$$\mathcal{C} = \{[a,b);\ a < b \text{ são racionais }\}$$

é uma base cuja topologia por ela gerada é diferente da topologia do limite inferior em $\mathbb{R}$.

Exercício 3 Definição: Seja $(X,<)$ um conjunto munido de uma relação de ordem total com pelo menos dois elementos. Defina os seguintes conjuntos em X:

$$\begin{aligned}
&(a,b) = \{x \in X;\ a < x < b\}\\
&(a,+\infty) = \{x \in X;\ x > a\}\\
&(-\infty,b) = \{x \in X;\ x < b\}\\
&[a,b) = \{a\} \cup (a,b)\\
&[a,b] = \{a,b\} \cup (a,b)\\
&(a,b] = \{b\} \cup (a,b)\\
&[a,+\infty) = \{a\} \cup (a,+\infty)\\
&(-\infty,b] = \{b\} \cup (-\infty,b).
\end{aligned}$$

Denote $a_0 \in X$ o menor elemento de X, caso exista ($a_0 < x$ para todo $x \in X, x \neq a_0$) e b_0 o maior elemento, caso também exista. Considere a seguinte coleção

$$\beta = \{(a,b);\ a,b \in X\} \cup \{[a_0,b);\ b \in X\} \cup \{(a,b_0];\ a \in X\}$$

(i) Prove que β é base para uma topologia em X (a ela atribuimos o nome topologia da ordem).

(ii) Mostre que $(a,+\infty)$ e $(-\infty,b)$ são conjuntos abertos nesta topologia.

(ii) Mostre que a coleção das interseções finitas dos conjuntos do tipo $(a,+\infty)$ formam uma base para uma topologia. A topologia gerada por essa base é a mesma que a anterior?

Exercício 4 Seja Y um subconjunto de um conjunto totalmente ordenado X com a seguinte propriedade: Se $a,b \in Y$ então $(a,b) \subset Y$. Prove que a topologia induzida em Y como subespaço de X é exatamente a topologia da ordem de Y. Dê um contra-exemplo para essa afirmação caso Y não seja convexo.

Exercício 5 Seja $C([0,1],\mathbb{R})$ o espaço de todas as funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$.

(i) Fixados $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ e $\epsilon > 0$, considere

$$I(f,\epsilon) = \{g \in C([0,1],\mathbb{R});\ \int_0^1 |f-g|dx < \epsilon\}.$$

Prove que

$$\beta = \{I(f,\epsilon);\ f \in C([0,1],\mathbb{R}) \text{ e } \epsilon > 0\}$$

é base para uma topologia.

(ii) Fixados $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ e $\epsilon > 0$, considere

$$S(f,\epsilon) = \{g \in C([0,1],\mathbb{R});\ |g(x) - f(x)| < \epsilon\ \forall\ x \in [0,1]\}.$$

Prove que

$$\beta' = \{S(f,\epsilon);\ f \in C([0,1],\mathbb{R}) \text{ e } \epsilon > 0\}$$

é base para uma topologia.

(iii) Prove que $\tau_\beta \neq \tau_{\beta'}$.

Exercício 6 Uma função $f : X \to Y$ entre espaços topológicos é dita aberta se para cada aberto U em X, $f(U)$ é aberto em Y. Prove que as funções $\pi_1 : X \times Y \to X$ e $\pi_2 : X \times Y \to Y$ dadas por $\pi_1(x,y) = x$ e $\pi_2(x,y) = y$ são abertas (Considere em $X \times Y$ a topologia produto).

Exercício 7 Sejam A, B e A_α subconjuntos de um espaço topológico X. Mostre que

(i) Se $A \subset B$ então $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(iii) $\overline{\bigcup_\alpha A_\alpha} \supset \bigcup_\alpha \overline{A_\alpha}$. Mostre, através de contra-exemplo, que a inclusão pode ser estrita.

(iv) Qual o erro na "demonstração" abaixo?

- $\overline{\bigcup_\alpha A_\alpha} \subset \bigcup_\alpha \overline{A_\alpha}$. De fato: suponha que $x \in \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha}$. Então dada uma vizinhança U_x de x temos que $U_x \cap (\bigcup_\alpha A_\alpha) \neq \emptyset$. Logo, $U_x \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para algum α e portanto $x \in \overline{A_\alpha}$. Sendo assim $x \in \bigcup_\alpha \overline{A_\alpha}$, como queríamos.

Exercício 8 Se X é esp. topológico e $A \subset X$, prove que $\mathring{A} = X - (\overline{X - A})$.

Exercício 9 Mostre que a topologia da ordem em qualquer conjunto totalmente ordenado é Hausdorff.

Exercício 10 Mostre que um epaço X é Hausdorff se e somente se $\Delta = \{(x,x) \in X \times X\}$ é um subconjunto fechado da topologia produto de $X \times X$.