UFPB/CCEN/DM

Matemática Elementar I - 2011.2

Exercícios de revisão para a segunda avaliação

1. Considere a seguinte relação em $\mathbb{N}$: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x|y$. Mostre que $\mathcal{R}$ define uma ordem parcial no conjunto $\mathbb{N}$. $\mathbb{N}$ é totalmente ordenado com esta ordem parcial? Justifique sua resposta.

2. Considere $\mathbb{Z}$ com a relação $\mathcal{R}$ cuja regra é a mesma do item anterior. Podemos afirmar que $\mathcal{R}$ ainda é uma ordem parcial em $\mathbb{Z}$? Justifique sua resposta.

3. Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções da reta na reta, isto é,

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}.$$

Considere em $\mathcal{F}$ a seguinte relação: $f\mathcal{R}g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Mostre que $\mathcal{R}$ é relação de ordem mas $\mathcal{F}$ não é totalmente ordenado com esta relação.

4. Mostre que as propriedades abaixo são válidas para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = n+1$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

   (c) $3|4^n + 5$

   (d) $9|4^n + 15n - 1$

   (e) $6|n(n^2+5)$

5. Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$. Resolva as questões abaixo, utilizando-se do algoritmo da divisão euclidiana:

   (a) Mostre que, se a e b são ímpares, então $a^2 + b^2$ é divisível por 2 mas não é divisível por 4.

   (b) Mostre que se 3 não divide a então o resto da divisão de a^2 por 3 é sempre 1.

   (c) Use o item anterior para mostrar que se $3|a^2 + b^2$ então $3|a$ e $3|b$.

   (d) A divisão de a^2 por 6 nunca deixa resto 2.

   (e) O resto da divisão de a por 20 é 8. Qual é o resto da divisão de a por 5?

6. Questões envolvendo sistemas de numeração.

   (a) Escreva $(2416)_7$ nas bases 5 e 12.

   (b) Mostre que um número a, escrito na base decimal, é divisível por 4 se e somente se seus dois últimos algarismos formam um número divisível por 4.

(c) Escolha um número abc de três algarismos no sistema decimal, de modo que os algarismos das centenas a e o das unidades c difiram de, pelo menos, duas unidades. Considere os números abc e cba e subtraia o menor do maior, obtendo o número xyz. Mostre que a soma de xyz com zyx vale 1089.

(d) Calcule n sabendo que $37 = (52)_n$

(e) Um certo número de três algarismos na base 10 aumenta de 36 se permutarmos os dois algarismos da direita, e diminui de 270 se permutarmos os dois algarismos da esquerda. O que acontece ao número se permutarmos os dois algarismos extremos?

(f) Mostre que todo número natural se escreve de forma única como uma soma de potências de 2. (Sugestão: como fica este número no sistema de numeração binário?)

7. Questões envolvendo MDC e MMC.

   (a) Mostre que $\text{mdc}(2n+1, 9n+4) = 1, \forall\, n \in \mathbb{Z}$

   (b) Mostre que $\text{mdc}(n+1, n^2+n+1) = 1, \forall\, n \in \mathbb{Z}$

   (c) Mostre que $\text{mdc}(a, a+b)|b, \forall\, a, b \in \mathbb{N}$

   (d) Mostre que $\text{mdc}\left(\dfrac{a^n-1}{a-1}, a-1\right) = (a-1, n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $a \in \mathbb{Z}$ com $a \neq 1$.

   (e) Mostre que $a|c$ e $b|c$ se e somente se $\dfrac{ab}{\text{mdc}(a,b)} \mid c$, sejam quais forem $a, b \in \mathbb{Z}^*$ e $c \in \mathbb{Z}$.

   (f) Mostre que $k = \text{mmc}(a, b)$ se e somente se $\text{mdc}\left(\dfrac{k}{a}, \dfrac{k}{b}\right) = 1$

   (g) Calcule $\text{mmc}(n^2+1, n+1)$.

8. Para cada $a, b \in \mathbb{Z}^*$, defina

$$X(a, b) = \{x \in \mathbb{N};\ \text{existem } u, v \in \mathbb{Z} \text{ tais que } x = au + bv\}.$$

   Mostre que

   (a) $X(a, b) = X(b, a)$

   (b) $X(a, b) = \{n \in \mathbb{N};\ n \text{ é múltiplo de } \text{mdc}(a, b)\}$

9. Sobre equações diofantinas lineares.

   (a) Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. Mostre que $ax + by = c$ tem soluções $x, y \in \mathbb{Z}$ se e somente se $\text{mdc}(a, b)|c$.

   (b) Sejam x_0 e y_0 uma solução particular da equação $ax + by = c$. Mostre que todas as soluções inteiras possíveis são dadas por

$$x = x_0 + k\frac{a}{d} \quad \text{e} \quad y = y_0 - k\frac{b}{d}$$

   para todo $k \in \mathbb{Z}$, onde $d = \text{mdc}(a, b)$.

10. De quantas maneiras pode-se comprar selos de 3 reais e de 5 reais de modo que se gaste exatamente 50 reais?