UFPB/CCEN/DM/PGMAT

Tópicos especiais em Análise III - 2012.1

Exercício 1

1. Seja E um espaço de Banach. Dizemos que um funcional $\Phi : E \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $x \in E$ se existe $A \in E'$ tal que
$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = Ah + o(h)$$
onde $o : E \to R$ é tal que $\lim\limits_{\|h\| \to 0} o(h)/\|h\| = 0$.

   A unicidade de A permite denotar $A \equiv \Phi'(u)$.

   Dizemos que Φ é de classe C^1 (notação: $\Phi \in C^1(E)$) se Φ é diferenciável em todo $x \in E$ e se $\Phi' : E \to E'$ for contínua (nas topologias das normas de E e E').

   Dizemos ainda que Φ é derivável a Gâteaux em $x \in E$ se para cada $h \in E$ exite o limite
$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(x) \equiv \lim_{t \to 0} \frac{\Phi(x+th) - \Phi(x)}{t}.$$

   Com base nessas definições, mostre que:

   (a) Ser derivável a Gâteaux em x não significa ser contínua em x.

   (b) Se Φ é contínua e derivável a Gâteaux em todo $x \in E$ e se, além disso, os funcionais $\partial \Phi / \partial h : E \to \mathbb{R}$ são contínuos, então $\Phi \in C^1(E)$.