Noções de Lógica Matemática – 2^a parte

Argumentação em Matemática – período 2009.2
Prof. Lenimar N. Andrade

1 de setembro de 2009

Sumário

1 Condicional

Definição: Sendo p e q proposições, podemos construir uma nova proposição $p \to q$ através do emprego do conectivo *condicional*, cujo símbolo é $\to$. Neste caso, a proposição p é denominada *antecedente* e q é denominada *consequente* (ou *conclusão*).

A proposição $p \to q$ pode ser lida de várias formas:

- "Se p, então q."
- "p é condição necessária para q."
- "q é condição suficiente para p."
- "q, se p."

O condicional $p \to q$ é considerado **falso** somente quando p é verdadeira e q é falsa; nos demais casos, $p \to q$ é considerada **verdadeiro**. Este critério está resumido na seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \to q$
V	F	F
V	V	V
F	V	V
F	F	V

2 Bicondicional

Definição: Sendo p e q proposições, podemos construir uma nova proposição $p \leftrightarrow q$ através do emprego do conectivo *bicondicional*, cujo símbolo é $\leftrightarrow$.

A proposição $p \leftrightarrow q$ pode ser lida de várias formas:

- "p se e somente se q."
- "p é condição necessária e suficiente para q."
- "q é condição necessária e suficiente para p."

O bicondicional $p \leftrightarrow q$ é considerado **verdadeiro** somente quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas; nos demais casos, $p \leftrightarrow q$ é considerada **falso**. Este critério está resumido na seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

3 Recíprocas e contrapositivas

Definição: Consideremos proposições p e q. Definimos:

- A *recíproca* do condicional $p \to q$ é o condicional $q \to p$.
- A *contrapositiva* do condicional $p \to q$ é o condicional $\neg q \to \neg p$.

Exemplo: Seja p a proposição condicional *"Se n é um inteiro primo, então n não é divisível por 3."*

- A recíproca de p é *"Se n não é divisível por 3, então n é um inteiro primo."*
- A contrapositiva de p é *"Se n é divisível por 3, então n não é um inteiro primo."*

4 Tautologias e contradições

- Sendo v uma proposição formada a partir de outras proposições p, q, ... através do emprego dos conectivos lógicos $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$. Dizemos que v é uma *tautologia* ou uma *proposição logicamente verdadeira* quando ela for sempre **verdadeira**, independentemente dos valores lógicos das componentes p, q, ...
- Dessa forma, a tabela-verdade de uma tautologia só apresenta V na última coluna.

Exemplo: Qualquer que seja o valor lógico de uma proposição p, temos que $p \vee \neg p$ será sempre verdadeira. Logo, $p \vee \neg p$ é uma tautologia.

- Sendo f uma proposição formada a partir de outras proposições p, q, ... através do emprego dos conectivos lógicos $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$. Dizemos que f é uma *contradição* ou uma *proposição logicamente falsa* quando ela for sempre **falsa**, independentemente dos valores lógicos das componentes p, q, ...
- Dessa forma, a tabela-verdade de uma contradição só apresenta F na última coluna.
- A negação de uma tautologia é uma contradição, e vice-versa.

Exemplo: Qualquer que seja o valor lógico de uma proposição p, temos que $p \wedge \neg p$ será sempre falsa. Logo, $p \wedge \neg p$ é uma contradição.

5 Tautologias e equivalências

Exemplo importante: Sendo p e q proposições, mostre que $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ é uma tautologia.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Observação: Em geral, quando $p \leftrightarrow q$ for uma tautologia, então $p \equiv q$. Assim, neste exemplo, ficou mostrado que $p \rightarrow q$ é equivalente a $\neg p \vee q$.

Exemplo: Sendo p e q proposições, mostre que a proposição s definida por $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ é uma tautologia.

Tabela-verdade:

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	s
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Observação: Neste exemplo, ficou mostrado que $p \leftrightarrow q$ é equivalente a $(p \to q) \wedge (q \to p)$.

Exemplo: Sendo p e q proposições, mostre que a proposição $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ é uma tautologia.

Tabela-verdade

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Observação: Neste exemplo, ficou mostrado que o condicional $p \to q$ é equivalente à sua contrapositiva $\neg q \to \neg p$.

6 Quantificadores lógicos

Sentenças abertas

Há expressões como:

- $x + 5 = 9$
- $x^2 + y^2 = 1$
- x é uma cidade do sertão paraibano

que contém variáveis x, y, ... e que não são consideradas proposições porque não podem ser classificadas em verdadeiras ou falsas, dependem dos valores atribuídos às variáveis.

Variáveis livres

Uma sentença do tipo $p(x)$, ou do tipo $p(x, y)$, ... que exprime algo dependendo de variáveis x, y, ... são denominadas *sentenças abertas* ou *funções proposicionais* e as variáveis x, y, ... são chamadas *variáveis livres*.

Conjunto-universo

O conjunto U de todos os possíveis valores que podem ser atribuídos às variáveis livres de uma sentença aberta é chamado *conjunto-universo* ou *universo de discurso.*

Conjunto-verdade

O *conjunto-verdade* de uma sentença aberta é formado por todos os elementos do universo de discurso que tornam a sentença verdadeira.

Exemplo: Consideremos a sentença aberta $p(x)$: $x+5=9$ e o universo como sendo o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$. Se atribuirmos a x o valor 4, então a sentença se torna uma proposição verdadeira: $4+5=9$. E esse é o único valor que pode torná-la verdadeira. Assim, seu conjunto-verdade é $V=\{4\}$.

Quantificadores

Há duas maneiras de transformar uma sentença aberta em uma proposição:

- atribuir valor às variáveis livres
- utilizar quantificadores.

São dois os quantificadores:

- **Quantificador universal**, simbolizado por $\forall$, que se lê *"qualquer que seja", "para todo", "para cada".*
- **Quantificador existencial**, simbolizado por $\exists$, que se lê: *"existe", "existe algum", "existe pelo menos um".*

Quantificador universal

Em um universo U, uma sentença aberta $p(x)$ que exprime algo a respeito de $x \in U$ pode ser transformada em proposição da forma $\forall x(p(x))$ e que se lê: *"qualquer que seja x, temos $p(x)$".*

Exemplos:

- $\forall x(x+3=7)$ que se lê *"qualquer que seja x, temos $x+3=7$".* Se considerarmos o conjunto-universo como sendo $U=\mathbb{R}$ temos que essa é uma proposição falsa.
- $\forall x(2x+1>0)$ que se lê *"qualquer que seja x, temos $2x+1>0$".* Se considerarmos o conjunto-universo como sendo $U=\mathbb{N}$ temos que essa proposição é verdadeira; mas, se considerarmos $U=\mathbb{Z}$, é falsa.

Quantificador existencial

Em um universo U, uma sentença aberta $p(x)$ que exprime algo a respeito de $x \in U$ pode ser transformada em proposição da forma $\exists x(p(x))$ e que se lê: *"existe algum x tal que $p(x)$"*.

Exemplos:

- $\exists x(x+3=7)$ que se lê: *"existe x tal que $x+3=7$."* Se considerarmos o universo $U=\mathbb{Z}$ temos que é uma proposição verdadeira
- $\exists x(x^2+1=0)$ que se lê: *"existe x tal que $x^2+1=0$."* Se considerarmos $U=\mathbb{R}$, é falsa; mas, se considerarmos $U=\mathbb{C}$, é verdadeira.

Observação: Às vezes, é utilizado também o quantificador $\exists|$ que se lê: *"existe um único"* ou *"existe um só"*.

Observações: Em muitas situações da Matemática os quantificadores ficam subentendidos. Por exemplo:

- Uma conhecida fórmula de Trigonometria é $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$. Sendo o universo de discurso o conjunto dos números reais, um enunciado mais completo dessa fórmula seria

$$\forall x \ (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1)$$

- De modo análogo, a propriedade comutativa da adição de números reais, $x+y=y+x$, seria melhor enunciada na forma

$$\forall x \ \forall y \ (x+y=y+x)$$

- Considere a afirmação: *"O inteiro 13 é a soma de dois quadrados perfeitos"*. Sendo o universo de discurso o conjunto dos números inteiros, essa afirmação pode ser escrita na forma

$$\exists m \ \exists n \ (13 = m^2 + n^2)$$

7 Negação de proposições quantificadas

Exemplo: Considere o conjunto-universo como sendo $U=\{1,2,3\}$.

- Descreva o que significa $\forall x(p(x))$ ser verdadeira;
- Descreva o que significa $\exists x(p(x))$ ser verdadeira;
- Determine as negações das proposições dos itens anteriores.

Solução:

- Como x só pode assumir os valores em U, só podemos ter $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 3$. Assim, $\forall x(p(x))$ ser verdadeira é o mesmo que $p(1)$ e $p(2)$ e $p(3)$ serem todas verdadeiras. Portanto,

$$\forall x(p(x)) \equiv p(1) \wedge p(2) \wedge p(3).$$

- Como $x \in U = \{1, 2, 3\}$, temos que $\exists x(p(x))$ é verdadeira é o mesmo que $p(1)$ ou $p(2)$ ou $p(3)$ ser verdadeira. Portanto,

$$\exists x(p(x)) \equiv p(1) \vee p(2) \vee p(3).$$

- Nos itens anteriores, vimos que $\forall x(p(x)) \equiv p(1) \wedge p(2) \wedge p(3)$ e que $\exists x(p(x)) \equiv p(1) \vee p(2) \vee p(3)$ se o conjunto-universo for $U = \{1, 2, 3\}$. Daí, podemos obter suas negações:

$$\neg(\forall x(p(x))) \equiv \neg p(1) \vee \neg p(2) \vee \neg p(3)$$

$$\neg(\exists x(p(x))) \equiv \neg p(1) \wedge \neg p(2) \wedge \neg p(3)$$

de onde observamos que

$$\neg(\forall x(p(x))) \equiv \exists x(\neg p(x))$$

$$\neg(\exists x(p(x))) \equiv \forall x(\neg p(x))$$

Negação de uma proposição com $\forall$

A negação de proposições quantificadas é inspirada em situações comuns:

- Negar que *"todo político é rico"* equivale a dizer que *"existe pelo menos um político que não é rico";*
- Negar que *"toda cidade tem um clima quente"* equivale a dizer que *"existe pelo menos uma cidade que não tem o clima quente";*
- Negar que *"todo número real tem um logaritmo decimal"* equivale a dizer que *"existe pelo menos um número real que não tem logaritmo decimal".*

Definição: Formalizamos o que foi observado em vários exemplos de negações de proposições com o quantificador universal, definindo:

$$\neg(\forall x(p(x))) \equiv \exists x(\neg p(x))$$

Negação de uma proposição com $\exists$

Observe as seguintes proposições, baseadas em situações do dia-a-dia:

- Negar que *"existe um estudante rico"* equivale a dizer que *"todo estudante não é rico"*.
- Negar que *"existe um lugar do sertão que tem muita água"* equivale a dizer que *"todo lugar do sertão não tem muita água"*.
- Negar que *"existe pelo menos um leão mansinho"* equivale a dizer que *"todo leão não é mansinho"*.

Definição: Formalizamos o que foi observado em vários exemplos de negações de proposições com o quantificador existencial, definindo:

$$\neg(\exists x(p(x))) \equiv \forall x(\neg p(x))$$

Negação de proposições quantificadas – resumo

- Uma proposição quantificada com o quantificador universal, por exemplo $\forall x(p(x))$, é negada da seguinte forma:
  - Troca-se o quantificador universal $\forall$ pelo existencial $\exists$;
  - Nega-se $p(x)$;

  Dessa forma, obtém-se $\exists x(\neg p(x))$ como sendo a negação.
- Uma proposição quantificada com o quantificador existencial, por exemplo $\exists x(q(x))$, é negada da seguinte forma:
  - Troca-se o quantificador existencial $\exists$ pelo universal $\forall$;
  - Nega-se $q(x)$;

  Dessa forma, obtém-se $\forall x(\neg q(x))$ como sendo a negação.

8 Exercícios resolvidos

Exercício 1 : Determine o valor lógico das seguintes proposições compostas:

a) Se $2 + 2 = 4$, então $3 + 1 = 8$;

b) Se $2 + 2 = 4$, então $3 + 1 = 4$;

c) Se $2 + 2 = 3$, então $3 + 1 = 8$;

d) Se $2 + 2 = 3$, então $3 + 1 = 4$.

Solução:

a) Falsa, porque $2+2=4$ é verdadeira e $3+1=8$ é falsa;

b) Verdadeira, porque $2+2=4$ é verdadeira e $3+1=4$ é verdadeira;

c) Verdadeira, porque $2+2=3$ é falsa e $3+1=8$ é falsa;

d) Verdadeira, porque $2+2=3$ é falsa e $3+1=4$ é verdadeira.

Exercício 2: Sendo p e q proposições

- p: *"Eu estou gripado"*
- q: *"Eu vou fazer a prova final"*
- r: *"Eu vou querer ser aprovado"*

expresse as proposições

- $(p \vee \neg q) \rightarrow \neg r$
- $\neg p \rightarrow (q \wedge r)$

na linguagem natural.

Solução:

- $(p \vee \neg q) \rightarrow \neg r$: *"Se eu estiver gripado ou não fizer a prova final, então não vou querer ser aprovado".*
- $\neg p \rightarrow (q \wedge r)$: *"Se eu não estiver gripado, então eu vou fazer a prova final e vou querer ser aprovado".*

Exercício 3 : Considere p, q, r, s, t as seguintes proposições:

- p: "Diana estuda"
- q: "Diana joga voleibol"
- r: "Diana vai passar no vestibular"
- s: "Se Diana estuda e não joga voleibol, então ela vai passar no vestibular"
- t: "Diana vai passar no vestibular se, e somente se, ela estuda ou joga voleibol"

Escreva as proposições s e t usando os conectivos lógicos e as proposições p, q e r.

Solução:

- s: $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$
- t: $r \leftrightarrow (p \vee q)$

Exercício 4 : Considere a proposição *"Se* $4+2=9$*, então o gráfico de* $y = x^2$ *é uma parábola"*.

a) Qual é a sua recíproca?

b) Qual é a sua contrapositiva?

c) Incluindo a sentença dada, quais são verdadeiras e quais são falsas?

Solução:

a) Recíproca: *"Se o gráfico de* $y = x^2$ *é uma parábola, então* $4+2=9$*"*.

b) Contrapositiva: *"Se o gráfico de* $y = x^2$ *não é uma parábola, então* $4+2 \neq 9$*"*.

c)
   - A sentença dada é verdadeira, porque $4+2=9$ é falsa e "o gráfico de $y = x^2$ é uma parábola" é verdadeira. Logo, a contrapositiva também é verdadeira (pois é equivalente à sentença dada)
   - A recíproca é falsa porque "o gráfico de $y = x^2$ é uma parábola" é verdadeira e $4+2=9$ é falsa.

Exercício 5:

a) Sendo p e q proposições, determine qual é a negação de $p \rightarrow q$.

b) Determine qual é a negação de

"Se vai chover amanhã, então não irei à praia".

Solução:

a) $p \rightarrow q$ é equivalente a $\neg p \vee q$, logo, $\neg(p \rightarrow q)$ é equivalente a $\neg(\neg p \vee q)$, ou seja, $\neg(p \rightarrow q) \equiv (\neg\neg p \wedge \neg q)$ que é o mesmo que

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q)$$

b) A proposição dada é da forma $p \rightarrow q$ onde
   - p: *"Vai chover amanhã"*
   - q: *"Não irei à praia"*.

Logo, sua negação é $p \wedge \neg q$, ou seja,

"Vai chover amanhã e irei à praia".

Exercício 6:

a) Sendo p e q proposições, determine qual é a negação de $p \leftrightarrow q$.

b) Determine qual é a negação de

$$(3 + 4 = 7) \leftrightarrow (4 < 8)$$

Solução:

a) Como $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ e $q \rightarrow p \equiv \neg q \vee p$, temos que

$$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \equiv (\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p))$$

Portanto:

$$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$$

b) Usando o item (a), a negação da proposição dada é

$$(3 + 4 = 7 \ \wedge \ 4 \geq 8) \vee (3 + 4 \neq 7 \ \wedge \ 4 < 8).$$

Exercício 7: Sabendo que p e s são proposições verdadeiras e que q e r são falsas, determine o valor lógico de:

a) $p \wedge (r \leftrightarrow \neg r \wedge s)$

b) $(r \vee s) \rightarrow (q \rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg s))$

Solução:

a) Sendo r falsa e s verdadeira, temos que

- $\neg r$ é verdadeira;
- $(\underbrace{\neg r}_{V} \wedge \underbrace{s}_{V})$ é verdadeira;
- $\underbrace{r}_{F} \leftrightarrow (\underbrace{\neg r \wedge s}_{V})$ é falsa;

Como p é verdadeira, temos que $\underbrace{p}_{V} \wedge \underbrace{(r \leftrightarrow \neg r \wedge s)}_{F}$ é **falsa.**

b) Como p e s são verdadeiras e q e r são falsas, temos:

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{r}_{F} \vee \underbrace{s}_{V})}_{V} \rightarrow \underbrace{(\underbrace{q}_{F} \rightarrow \underbrace{(\underbrace{\neg p}_{F} \leftrightarrow \underbrace{\neg s}_{F})}_{V})}_{V}}_{V}$$

Dessa forma, concluímos que $(r \vee s) \rightarrow (q \rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg s))$ é **verdadeira.**

Exercício 8 : Sabendo que $\neg(p \wedge q \rightarrow r)$ é uma proposição verdadeira, determine o valor lógico de $(r \leftrightarrow p) \vee (q \rightarrow r)$.

Solução:

- Sendo $\neg(p \wedge q \rightarrow r)$ verdadeira, temos que $(p \wedge q \rightarrow r)$ é falsa;
- Uma proposição condicional só é falsa quando o antecedente for verdadeiro e o consequente for falso. Logo, $p \wedge q$ é verdadeira e r é falsa;
- Se $p \wedge q$ é verdadeira, então p e q são verdadeiras;
- Sendo r falsa e p verdadeira, o bicondicional $r \leftrightarrow p$ é falsa;
- Sendo q verdadeira e r falsa, o condicional $q \rightarrow r$ é falsa;
- Concluímos assim que $(r \leftrightarrow p) \vee (q \rightarrow r)$ é **falsa.**

Exercício 9: Considere a proposição $(p \vee q) \leftrightarrow ((\neg r \wedge s) \rightarrow t)$, onde p, q, r, s, t são proposições.

a) A tabela-verdade da proposição dada tem quantas linhas?

b) Qual o valor lógico da proposição dada, se p, q e r forem verdadeiras e s e t forem falsas?

Solução:

a) A proposição dada é composta de 5 componentes: p, q, r, s e t. Logo, sua tabela-verdade tem $2^5 = 32$ linhas.

b) $\underbrace{(\underbrace{p}_{V} \vee \underbrace{q}_{V})}_{V} \leftrightarrow \underbrace{(\underbrace{(\underbrace{\neg r}_{F} \wedge \underbrace{s}_{F})}_{F} \rightarrow \underbrace{t}_{F})}_{V}$ é **verdadeira** se p, q e r forem verdadeiras e s e t forem falsas.

Exercício 10 : Sendo p e q proposições, mostre que

$$(p \wedge (p \to q)) \wedge \neg q$$

é uma contradição.

Solução:

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$\neg q$	$(p \wedge (p \to q)) \wedge \neg q$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

Como só temos F na última coluna da tabela-verdade, temos que se trata de uma contradição.

Exercício 11 : Sejam p, q e r proposições quaisqer. Mostre que s definida por

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$$

é uma tautologia.

Solução:

- Neste caso, podemos construir a tabela-verdade da proposição dada;
- Como temos 3 proposições componentes, temos $2^3 = 8$ linhas na tabela;
- Observamos que a última coluna da tabela só tem V e concluímos que a proposição dada é uma tautologia.

Exercício 11:

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$p \to r$	s
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Quaisquer que sejam os valores lógicos das componentes p, q e r, a proposição composta s é sempre verdadeira; logo, é uma tautologia.

Exercício 12 : Considere a proposição $\forall m \; \exists n \; (m + n = 4)$ no universo de discurso U.

a) Qual é o valor lógico da proposição se $U = \mathbb{N}$?

b) Qual é o valor lógico da proposição se $U = \mathbb{Z}$?

Solução:

a) Quando $U = \mathbb{N}$ a proposição dada é *"Para todo número natural m, existe um número natural n tal que a soma $m + n$ é igual a 4"* que é **falsa**. Por exemplo, atribuindo-se a m o valor 10, não existe outro natural n cuja soma com m seja igual a 4.

b) Quando $U = \mathbb{Z}$ a proposição dada é *"Para todo inteiro m, existe um inteiro n tal que a soma $m + n$ é igual a 4"* que é **verdadeira**. Para todo inteiro m, basta considerar o inteiro $n = 4 - m$ para obtermos $m + n = 4$.

Exercício 13: Considerando o universo de discurso como sendo o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, determine o valor lógico das seguintes proposições:

a) $\forall x \; \exists y \; (x + y = 0)$

b) $\exists y \; \forall x \; (x + y = 0)$

Solução:

a) A proposição dada é: *"Para qualquer número real x, existe um número real y tal que a soma $x + y$ é igual a 0"* que é **verdadeira**. Qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, basta considerar $y = -x \in \mathbb{R}$ para termos $x + y = 0$.

b) A proposição do item (b) é: *"Existe um número real y tal que para todo número real x temos $x + y = 0$"* é **falsa**. Não existe um número real y que possa ser somado com todos os outros números reais e o resultado seja sempre igual a 0.

Exercício 14: Seja $p(x, y)$ a sentença aberta "$x > y$" e $U = \mathbb{R}$ o universo de discurso. Determine qual é o valor lógico da proposição:

$$\forall y \; \exists x \; p(x, y) \to \exists x \; \forall y \; p(x, y)$$

Solução:

- $\forall y \; \exists x \; p(x, y)$ significa que *"Para todo número real y, existe um outro real x tal que $x > y$"* que é verdadeiro;

- $\exists x \; \forall y \; p(x, y)$ significa que *"Existe um número real x tal que para todo real y temos $x > y$"*, ou seja, *"Existe um número real x que é maior do que todos os outros reais y"* é falsa.

- Pelo que mostramos nos itens anteriores, o condicional $\underbrace{\forall y\ \exists x\ p(x,y)}_{V} \to \underbrace{\exists x\ \forall y\ p(x,y)}_{F}$ é **falso.**

Exercício 15 : Sendo $p(x,y)$, $q(x,y)$ e $r(x,y)$ três sentenças abertas com variáveis livres x e y, qual é a negação da seguinte proposição?

$$\forall x\ \exists y\ ((p(x,y) \land q(x,y)) \to r(x,y))$$

Solução:

$$\begin{aligned}
&\neg(\forall x\ \exists y\ ((p(x,y) \land q(x,y)) \to r(x,y)))\\
&\equiv \exists x\ \neg(\exists y\ ((p(x,y) \land q(x,y)) \to r(x,y)))\\
&\equiv \exists x\ \forall y\ \neg((p(x,y) \land q(x,y)) \to r(x,y)))\\
&\equiv \exists x\ \forall y\ \neg(\neg(p(x,y) \land q(x,y)) \lor r(x,y)))\\
&\equiv \exists x\ \forall y\ (\neg\neg(p(x,y) \land q(x,y)) \land \neg r(x,y)))\\
&\equiv \exists x\ \forall y\ ((p(x,y) \land q(x,y)) \land \neg r(x,y)))
\end{aligned}$$

Exercício 16 : Sendo a e L constantes dadas, determine qual é a negação da seguinte proposição:

$$\forall \epsilon\ \exists \delta\ \forall x\ ((0 < |x-a| < \delta) \to (|f(x) - L| < \epsilon)).$$

Solução:

$$\begin{aligned}
&\neg(\forall \epsilon\ \exists \delta\ \forall x\ ((0 < |x-a| < \delta) \to (|f(x) - L| < \epsilon)))\\
&\equiv \exists \epsilon\ \forall \delta\ \exists x\ \neg((0 < |x-a| < \delta) \to (|f(x) - L| < \epsilon)))\\
&\equiv \exists \epsilon\ \forall \delta\ \exists x\ \neg(\neg(0 < |x-a| < \delta) \lor (|f(x) - L| < \epsilon)))\\
&\equiv \exists \epsilon\ \forall \delta\ \exists x\ (\neg\neg(0 < |x-a| < \delta) \land \neg(|f(x) - L| < \epsilon)))\\
&\equiv \exists \epsilon\ \forall \delta\ \exists x\ ((0 < |x-a| < \delta) \land \neg(|f(x) - L| < \epsilon)))\\
&\equiv \exists \epsilon\ \forall \delta\ \exists x\ ((0 < |x-a| < \delta) \land (|f(x) - L| \geq \epsilon)))
\end{aligned}$$