UFPB/CCEN/DM

INTRODUÇÃO À ANÁLISE REAL - 2014.1

Reposição da 3ª Prova

Nome: ____

Matrícula: ____

1. (4,0 pontos) Marque V ou F nas sentenças abaixo, justificando brevemente a sua escolha. Respostas sem justificativas não são aceitas.

( ) Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monótona é sempre limitada e integrável.

( ) Se uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b)$ então sempre será integrável.

( ) Se uma função $f; [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável então podemos afirmar que

$$\int_a^b f(x)dx = \sup\{s(f; P); P \text{ é partição de } [a, b]\}.$$

( ) Qualquer função integrável em um intervalo compacto possui uma primitiva.

( ) É possível encontrar uma função $f; [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in X$, com $[a, b]/X$ tendo medida nula, de forma que f não é integrável.

( ) É possível encontrar uma função contínua $f; [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$, f não identicamente nula, mas de forma que $\int_a^b f(x)dx = 0$.

2. (2,0 pontos) Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada e integrável, mostre que a sua integral indefinida $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é uma função Lipschitziana.

3. (2,0 pontos) Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua. Defina $\phi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dado por $\phi(x) = \int_{x^4}^{x^2} f(t)dt$. Mostre que ϕ é derivável e calcule sua derivada em termos da função f.

4. (2,0 pontos) Suponha que $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $g(xy) = g(x) + g(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Sabendo que as únicas funções contínuas da reta na reta que são aditivas (isto é, funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x + y) = f(x) + f(y)$) são as funções lineares, mostre que existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = c \cdot \log(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$.