UFPB/CCEN/DM

INTRODUÇÃO À ANÁLISE REAL - 2014.1

Reposição da 2ª Prova

Nome: ____

Matrícula: ____

1. (2,0 pontos) Marque V ou F nas sentenças abaixo, justificando brevemente a sua escolha. Respostas sem justificativas não são aceitas.

( ) Seja X um conjunto de pontos isolados. Então $f : X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ caso x seja irracional e $f(x) = 0$ caso x seja racional, é uma função descontínua.

( ) Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$. Se $f : X \to Y$ for contínua e bijetiva, denotando $g : Y \to X$ como sua inversa ($g = f^{-1}$), temos que g também é contínua.

( ) A função $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$ é uniformemente contínua.

( ) Seja $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X$ um ponto de acumulação bilateral de X. Suponha ainda que $\lim_{x\to a^+}(f(x) - f(a))/(x - a) = c$, mas $\lim_{x\to a^-}(f(x) - f(a))/(x - a) = d$, onde $c \neq d$. Então f é descontínua no ponto a.

( ) Seja $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'_-$. Se a é ponto de mínimo de f então podemos afirmar, com certeza, que $f'_-(a) = 0$.

2. (2,0 pontos) Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável no intervalo aberto I. Dizemos que um ponto crítico de f é não degenerado quando $f''(c) \neq 0$. Mostre que se um ponto crítico é não degenerado então ele é máximo ou mínimo local.

3. (2,0 pontos) Seja $a \in X'_- \cap X'_+$. Mostre que existem duas sequências em X, uma estritamente crescente, outra estritamente decrescente, convergindo para a.

4. (2,0 pontos) Prove que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se e somente se $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$ seja qual for $X \subset \mathbb{R}$.

5. (2,0 pontos) Explique por que a função $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x$ caso $0 \leq x \leq 1$ e $f(x) = x + 1$ caso $1 < x \leq 2$, não possui primitiva (isto é, não existe F tal que $F'(x) = f(x)$).