UFPB/CCEN/DM

INTRODUÇÃO À ANÁLISE REAL - 2014.1

Repoição da 1ª Prova

Nome: ____

Matrícula: ____

1. (4,0 pontos) Marque V ou F nas sentenças abaixo, justificando brevemente a sua escolha. Respostas sem justificativas não são aceitas.

( ) O conjunto $A = \{2^x;\ x \in \mathbb{Q}\}$ possui ínfimo em $\mathbb{R}$.

( ) Se (x_n) é uma sequência crescente e limitada, definindo $a = \sup\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, temos que $\lim x_n = a$.

( ) Suponha que (x_n) é uma sequência que possui uma subsequência (x_{n_k}) tal que $\lim x_{n_k} = +\infty$. Então podemos afirmar, com certeza, que (x_n) é limitada inferiormente.

( ) Sabe-se que (a_n) é uma sequência de termos positivos tal que a série $\sum(-1)^n a_n$ é convergente. Então podemos concluir que $\sum a_n$ também é uma série convergente.

( ) Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto de pontos isolados. Então $\text{int}A = \emptyset$ e $A' = \emptyset$.

( ) Se A_n é uma família enumerável de conjuntos compactos, então a união $\bigcup A_n$ também será um conjunto compacto.

2. (2,0 pontos) Sejam $f, g : X \in \mathbb{R}$ duas funções limitadas superiormente. Prove que $\sup(f \cdot g) \leq \sup(f) \cdot \sup(g)$. Dê exemplos onde a igualdade não ocorre.

3. (2,0 pontos) Dado $X \subset \mathbb{R}$, definimos a fronteira de X como sendo o conjunto $\partial X = \overline{X} \cap \overline{\mathbb{R} \backslash X}$. Prove que ∂X é um conjunto fechado. Mostre que vale a igualdade $\overline{X} = X \cup \partial X$. Prove que X é aberto se e somente se $X \cap \partial X = \emptyset$ e que X é fechado se e somente se $\partial X \subset X$.

4. (2,0 pontos) Construa duas sequências em $\mathbb{R}$ tais que os conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \mathbb{N}$ formem os conjuntos de todos os pontos de aderência destas sequências, respectivamente.