Capítulo 3

Transformações Lineares

Neste capítulo vamos estudar um tipo especial de funções, as quais são chamadas de "transformações lineares" e que é um dos objetos fundamentais da álgebra linear. Em cálculo, por exemplo, costuma-se aproximar uma função diferenciável por uma transformação linear. Veremos, também, que resolver um sistema

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

de equações lineares é equivalente a encontrar todos os elementos $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tais que

$$T_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) = \mathbf{B},$$

onde $T_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{m\times 1}$ definida por $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) = \mathbf{AX}$ é uma transformação linear.

3.1 Transformações Lineares

Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma função $T : V \to W$ é uma *transformação linear* se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$, para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ (Aditividade).
2. $T(a\mathbf{u}) = aT(\mathbf{u})$, para todo $a \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} \in V$ (Homogeneidade).

Observações 3.1 *1. Intuitivamente, uma transformação linear é uma função que preserva as operações dos espaços vetoriais.*

2. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear, então $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, pois

$$T(\mathbf{0}) = T(0 \cdot \mathbf{u}) = 0 \cdot T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

3. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear, então

$$T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v}),\ \ \forall\ a, b \in \mathbb{R}\ \ e\ \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

pois

$$\begin{aligned} T(a\mathbf{u}+b\mathbf{v}) &= T(a\mathbf{u})+T(b\mathbf{v}) \\ &= aT(\mathbf{u})+bT(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Mais geralmente,

$$T(a_1\mathbf{u}_1+\cdots+a_n\mathbf{u}_n)=a_1T(\mathbf{u}_1)+\cdots+a_nT(\mathbf{u}_n),\ \forall\ a_i\in\mathbb{R}\ \ e\ \mathbf{u}_i\in V.$$

4. *Se $T: V\to W$ é uma transformação linear e $V=W$, dizemos que T é um* operador linear *sobre V.*

Exemplo 3.2 (Operador Nulo) *Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. A função $0: V\to W$ definida por $0(\mathbf{u})=\mathbf{0}$, para todo $\mathbf{u}\in V$, é uma transformação linear, pois*

$$0(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{0}=0(\mathbf{u})+0(\mathbf{v}),\ \forall\ \mathbf{u},\mathbf{v}\in V$$

e

$$0(a\mathbf{u})=\mathbf{0}=a0(\mathbf{u}),\ \forall\ a\in\mathbb{R}\ \ e\ \mathbf{u}\in V.$$

Exemplo 3.3 (Operador Identidade) *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. A função $I=I_V: V\to V$ definida por $I_V(\mathbf{u})=\mathbf{u}$, para todo $\mathbf{u}\in V$, é um operador linear, pois*

$$I_V(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\mathbf{u}+\mathbf{v}=I_V(\mathbf{u})+I_V(\mathbf{v}),\ \forall\ \mathbf{u},\mathbf{v}\in V$$

e

$$I_V(a\mathbf{u})=a\mathbf{u}=aI_V(\mathbf{u}),\ \forall\ a\in\mathbb{R}\ \ e\ \mathbf{u}\in V.$$

Exemplo 3.4 *Toda transformação linear $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é da forma ax, para algum $a\in\mathbb{R}$ fixado. De fato, é claro que a função $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $T(x)=ax$, para todo $x\in\mathbb{R}$, é uma transformação linear. Reciprocamente, seja $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma transformação linear. Então*

$$T(x)=T(1\cdot x)=T(1)x,\ \forall\ x\in\mathbb{R}.$$

Fazendo $a=T(1)\in\mathbb{R}$, obtemos $T(x)=ax$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

Exemplo 3.5 *Sejam $V=\mathbb{R}^{n\times 1}$, $W=\mathbb{R}^{m\times 1}$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ uma matriz fixada. A função $T_{\mathbf{A}}: V\to W$ definida por*

$$T_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})=\mathbf{AX},$$

para todo $\mathbf{X}\in V$, é uma transformação linear, pois

$$T_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}+\mathbf{Y})=\mathbf{A}(\mathbf{X}+\mathbf{Y})=\mathbf{AX}+\mathbf{AY}=T_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})+T_{\mathbf{A}}(\mathbf{Y}),\ \forall\ \mathbf{X},\mathbf{Y}\in V.$$

e

$$T_{\mathbf{A}}(a\mathbf{X})=\mathbf{A}(a\mathbf{X})=a(\mathbf{AX})=aT_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}),\ \forall\ a\in\mathbb{R}\ \ e\ \mathbf{X}\in V.$$

Note, também, que $S_{\mathbf{A}}:\mathbb{R}^{1\times m}\to\mathbb{R}^{1\times n}$ definida por

$$T_{\mathbf{A}}(\mathbf{v})=\mathbf{vA},$$

para todo $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{m\times 1}$, é uma transformação linear.

Exemplo 3.6 (Operador Diferencial) *Seja* $V = P_n(\mathbb{R})$ *o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes reais e grau menor do que ou igual a* n. *A função* $D : V \to V$ *definida por* $(Dp)(x) = p'(x)$, *para todo* $p \in V$, *é uma transformação linear, pois*

$$\begin{aligned}(D(p+q))(x) &= ((p+q)(x))' = (p(x)+q(x))' \\ &= p'(x) + q'(x) = (Dp)(x) + (Dq)(x) \\ &= (Dp + Dq)(x), \ \forall \ p, q \in V\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(D(ap))(x) &= (ap(x))' = ap'(x) = a(Dp)(x) \\ &= (a(Dp))(x), \ \forall \ a \in \mathbb{R} \ \text{e} \ p \in V.\end{aligned}$$

Exemplo 3.7 (Operador Semelhança) *Seja* $V = \mathbb{R}^2$. *A função* $T : V \to V$ *definida por*

$$T(x, y) = c(x, y), \ \forall \ c \in \mathbb{R},$$

é uma transformação linear (prove isto!). Quando $c > 0$, T *é chamado de* operador semelhança.

Exemplo 3.8 (Rotação de uma ângulo θ) *Seja* $V = \mathbb{R}^2$. *Determine a transformação linear* $R_\theta : V \to V$, *onde* $R_\theta(\mathbf{u})$ *é uma rotação anti-horário de um ângulo* θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, *do vetor* $\mathbf{u} \in V$.

Solução. Sejam $\mathbf{u} = (x, y)$ e $R_\theta(x, y) = (u, v)$. Então, pela Figura 3.1,

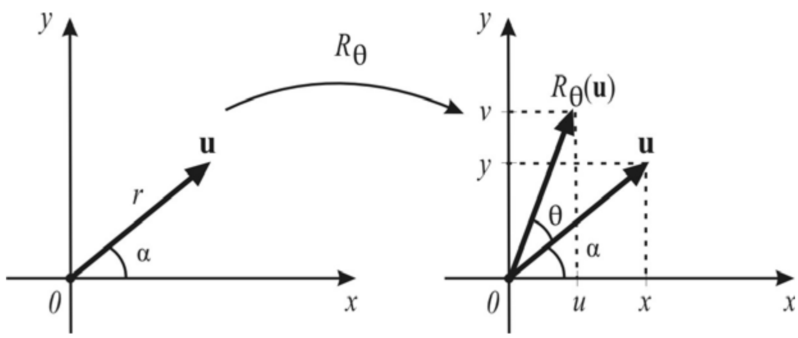

Figura 3.1: Rotação de um ângulo θ.

temos que

$$u = r\cos(\alpha + \theta), \ \ x = r\cos\alpha \ \text{ e } \ y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha.$$

Logo,

$$u = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

De modo análogo,

$$v = x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta.$$

Assim,

$$R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta).$$

Exemplo 3.9 (Operador Translação) *Seja $V = \mathbb{R}^2$. A função $T_\mathbf{v} : V \to V$ definida por*

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v},$$

onde $\mathbf{u} = (x, y)$ e $\mathbf{v} = (a, b)$, não é uma transformação linear, a menos que $a = b = 0$, pois

$$T(0, 0) = (a, b) \neq (0, 0)$$

(confira Figura 3.2).

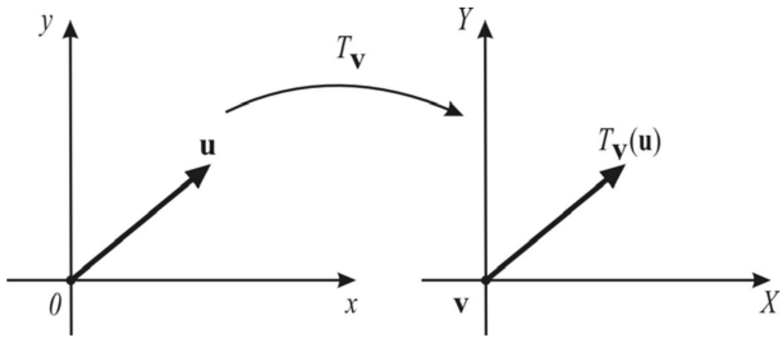

Figura 3.2: Translação por $\mathbf{v}$.

Exemplo 3.10 *Seja $V = \mathbb{R}^2$. A função $T : V \to V$ definida por $T(x, y) = (x, |y|)$ não é uma transformação linear, pois*

$$\begin{aligned} T((x, y) + (r, s)) &= T(x + r, y + s) \\ &= (x + r, |y + s|) \\ &\neq (x, |y|) + (r, |s|) \\ &= T(x, y) + T(r, s), \end{aligned}$$

desde que $|y + s| < |y| + |s|$ se $ys < 0$. Em particular,

$$T((2, 1) + (3, -1)) = T(5, 0) = (5, 0) \neq (5, 2) = T(2, 1) + T(3, -1)$$

Note que $T(0, 0) = (0, 0)$. Portanto, $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ é condição necessária mas não suficiente para que T seja uma transformação linear.

Exemplo 3.11 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo dos racionais $\mathbb{Q}$. Mostre que se a função $T : V \to W$ satisfaz à condição aditiva*

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}),\ \ \forall\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

então T é uma transformação linear.

Solução. Como $\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$ temos que

$$T(\mathbf{0})=T(\mathbf{0}+\mathbf{0})=T(\mathbf{0})+T(\mathbf{0}).$$

Logo, $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$. Assim,

$$\mathbf{0}=T(\mathbf{0})=T(\mathbf{u}+(-\mathbf{u}))=T(\mathbf{u})+T(-\mathbf{u})\Rightarrow T(-\mathbf{u})=-T(\mathbf{u}),\ \ \mathbf{u}\in V.$$

Dado $n\in\mathbb{N}$, segue, indutivamente, que $T(n\mathbf{u})=nT(\mathbf{u})$, para todo $n\in\mathbb{N}$ e $\mathbf{u}\in V$. Dado $n\in\mathbb{Z}$ com $n<0$, obtemos

$$T(n\mathbf{u})=T(-n(-\mathbf{u}))=-nT(-\mathbf{u})=-n(-T(\mathbf{u}))=nT(\mathbf{u}).$$

Assim, $T(n\mathbf{u})=nT(\mathbf{u})$, para todo $n\in\mathbb{Z}$ e $\mathbf{u}\in V$. Dado $n\in\mathbb{Z}$ com $n\neq 0$, obtemos

$$T(\mathbf{u})=T(n(\frac{1}{n}\mathbf{u}))=nT(\frac{1}{n}\mathbf{u}).$$

Logo, $T(\frac{1}{n}\mathbf{u})=\frac{1}{n}T(\mathbf{u})$, para todo $n\in\mathbb{Z}$, com $n\neq 0$, e $\mathbf{u}\in V$. Finalmente, dado $r=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$, obtemos

$$T(r\mathbf{u})=T(m(\frac{1}{n}\mathbf{u}))=mT(\frac{1}{n}\mathbf{u})=\frac{m}{n}T(\mathbf{u})=rT(\mathbf{u})$$

e, assim, $T(r\mathbf{u})=rT(\mathbf{u})$, para todo $r\in\mathbb{Q}$ e $\mathbf{u}\in V$. Portanto, T é uma transformação linear. Assim, podemos cuncluir que toda função definida em espaço vetorial sobre o corpo dos racionais $\mathbb{Q}$, satisfazendo à condição aditiva, é sempre linear. Mostraremos a seguir, que esse resultado não é, em geral, verdade.

Teorema 3.12 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Sejam $\{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n\}$ uma base de V e $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n$ vetores arbitrários em W. Então existe uma única transformação linear $T:V\to W$ tal que*

$$T(\mathbf{u}_i)=\mathbf{w}_i, i=1,\ldots,n.$$

Prova. (Existência) Como $\{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n\}$ é uma base de V temos que cada vetor $\mathbf{u}\in V$ pode ser escrito de modo único sob a forma

$$\mathbf{u}=x_1\mathbf{u}_1+\cdots+x_n\mathbf{u}_n.$$

Vamos definir $T:V\to W$ por

$$T(\mathbf{u})=x_1\mathbf{w}_1+\cdots+x_n\mathbf{w}_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{w}_i.$$

É claro que T está bem definida e

$$T(\mathbf{u}_i)=\mathbf{w}_i, i=1,\ldots,n,$$

pois

$$\mathbf{u}_i=0\mathbf{u}_1+\cdots+0\mathbf{u}_{i-1}+1\mathbf{u}_i+0\mathbf{u}_{i+1}+\cdots+0\mathbf{u}_n, i=1,\ldots,n.$$

Dados $\mathbf{v} \in V$, digamos

$$\mathbf{v} = y_1\mathbf{u}_1 + \cdots + y_n\mathbf{u}_n,$$

e $c \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\mathbf{w}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{w}_i + \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{w}_i = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T(c\mathbf{u}) &= T\left(\sum_{i=1}^{n}(cx_i)\mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(cx_i)\mathbf{w}_i \\ &= c\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{w}_i\right) = cT(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.

(Unicidade) Seja $S : V \to W$ outra transformação linear tal que

$$S(\mathbf{u}_i) = \mathbf{w}_i, i = 1, \ldots, n.$$

Então

$$S(\mathbf{u}) = S\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i S(\mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{w}_i = T(\mathbf{u}),$$

para todo $\mathbf{u} \in V$. Portanto, $S = T$. ■

Observação 3.13 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Sejam $\beta = \{\mathbf{u}_i\}_{i\in I}$ uma base de V e $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ uma família arbitrário de vetores em W. Então existe uma única transformação linear $T : V \to W$ tal que*

$$T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{w}_i,\ \forall\ i \in I.$$

Exemplo 3.14 *Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 2) = (3, 2, 1)$ e $T(3, 4) = (6, 5, 4)$.*

Solução. É fácil verificar que $\{(1, 2), (3, 4)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Assim, pelo Teorema 3.12, existe uma única transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 2) = (3, 2, 1)$ e $T(3, 4) = (6, 5, 4)$. Agora, para determinar T, dado $\mathbf{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, devemos encontrar $r, s \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{u} = r(1, 2) + s(3, 4),$$

isto é, resolver o sistema não-homogêneo

$$\left\{\begin{array}{r} r + 3s = x \\ 2r + 4s = y \end{array}\right. .$$

Logo, $r = \frac{1}{2}(-4x + 3y)$ e $s = \frac{1}{2}(2x - y)$. Portanto,

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T(r(1,2) + s(3,4)) \\ &= rT(1,2) + sT(3,4) \\ &= \frac{-4x+3y}{2}(3,2,1) + \frac{2x-y}{2}(6,5,4) \\ &= \left(\frac{3}{2}y, x + \frac{1}{2}y, 2x - \frac{1}{2}y\right). \end{aligned}$$

Exemplo 3.15 (Operador Projeção) *Determine a projeção de um vetor* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ *sobre a reta* $y = ax$, *com* $a \in \mathbb{R}$.

Solução. É fácil verificar que $\{(1,a), (-a,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Então, pelo Teorema 3.12, existe uma única transformação linear $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $P(1,a) = (1,a)$ e $P(-a,1) = (0,0)$. Agora, para determinar P, dado $\mathbf{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, devemos encontrar $r, s \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{u} = r(1,a) + s(-a,1),$$

isto é, resolver o sistema não-homogêneo

$$\begin{cases} r - as = x \\ ar + s = y \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \left(\frac{x+ay}{1+a^2}, \frac{ax+a^2y}{1+a^2}\right) \\ &= \frac{\langle (x,y),(1,a)\rangle}{\|(1,a)\|^2}(1,a). \end{aligned}$$

Como

$$\mathbb{R}^2 = [(1,a)] \oplus [(-a,1)],$$

dizemos que P é *a projeção sobre* $[(1,a)]$ *na direção de* $[(-a,1)]$, com $a \in \mathbb{R}$ (confira Figura 3.3).

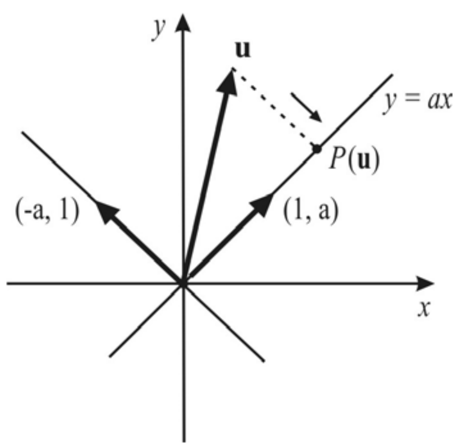

Figura 3.3: Projeção de um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ sobre a reta $y = ax$.

Exemplo 3.16 (Operador Reflexão) *Determine a reflexão de um vetor* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ *em torno de uma reta* $y = ax$, *com* $a \in \mathbb{R}$.

Solução. É fácil verificar que $\{(1,a),(-a,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Então, pelo Teorema 3.12, existe uma única transformação linear $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $R(1,a) = (1,a)$ e $R(-a,1) = (a,-1)$. Agora, para determinar R, dado $\mathbf{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, devemos encontrar $r, s \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{u} = r(1,a) + s(-a,1),$$

isto é, resolver o sistema não-homogêneo

$$\begin{cases} r - as = x \\ ar + s = y \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} R(x,y) &= \left(\frac{(1-a^2)x + 2ay}{1+a^2}, \frac{2ax - (1-a^2)y}{1+a^2}\right) \\ &= (x,y) - 2\frac{\langle (x,y),(1,a)\rangle}{\|(1,a)\|^2}(1,a). \end{aligned}$$

Como

$$\mathbb{R}^2 = [(1,a)] \oplus [(-a,1)],$$

dizemos que P é *a reflexão em* $[(1,a)]$ *na direção de* $[(-a,1)]$, com $a \in \mathbb{R}$ (confira Figura 3.4).

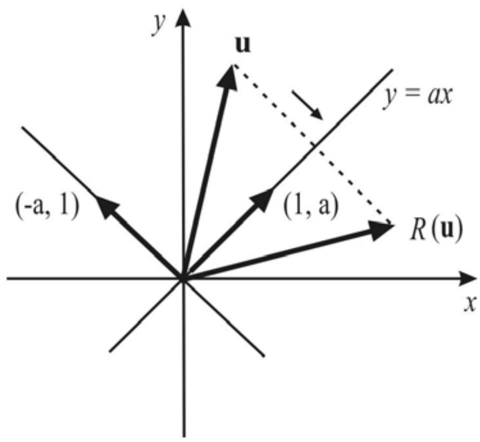

Figura 3.4: Reflexão de um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ em torno da reta $y = ax$.

Finalmente, se θ é o ângulo que a reta $y = ax$ faz com o eixo dos x, então $a = \tan\theta$ e é fácil verificar que

$$R(x,y) = (x\cos 2\theta + y \operatorname{sen} 2\theta, x \operatorname{sen} 2\theta - y\cos 2\theta).$$

Em particular, quando $\theta = \frac{\pi}{4}$, temos que

$$R(x,y) = (y,x).$$

Exemplo 3.17 *Mostre que existe uma função $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo à condição aditiva*

$$T(x + y) = T(x) + T(y), \ \forall \ x, y \in \mathbb{R},$$

mas não é uma transformação linear, isto é, $T(x) \neq ax$, para algum $x \in \mathbb{R}$.

Solução. É fácil verificar que $\mathbb{R}$ com as operações usuais é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$. Assim, pela Observação 2.38, podemos escolher uma base "de Hamel" $\beta = \{x_i\}_{i \in I}$ de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Assim, para cada $x \in \mathbb{R}$, existem únicos $r_{k_1}, \ldots, r_{k_n} \in \mathbb{Q}$, onde $k_1, \ldots, k_n \in I$, tais que

$$x = r_{k_1} x_{k_1} + \cdots + r_{k_n} x_{k_n} = \sum_{j=1}^{n} r_{k_j} x_{k_j}.$$

A função $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(x) = \sum_{j=1}^{n} r_{k_j} T(x_{k_j}), \ \forall \ x \in \mathbb{R},$$

possui as propriedades desejadas, pois se fizermos

$$T(x_{k_1}) = 1 \ \text{e} \ T(x_{k_2}) = 0,$$

então

$$T(x + y) = T(x) + T(y), \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}, \ \text{mas} \ T(x) \neq ax, \ \text{para algum} \ a \in \mathbb{R}.$$

EXERCÍCIOS

---

1. Verifique quais das transformações abaixo são lineares.

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x - y, 0)$.

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x - 1, y + z)$.

   (c) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $T(x) = (x, 2x, -x)$.

   (d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, x^3)$.

   ~~(e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.~~

2. Seja $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{n \times n}$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n. Se $\mathbf{B}$ é uma matriz não-nula fixada em $\mathbf{V}$, quais das seguintes transformações são lineares?

   (a) $T(\mathbf{A}) = \mathbf{BA}$.

   (b) $T(\mathbf{A}) = \mathbf{BA} - \mathbf{AB}$.

(c) $T(\mathbf{A}) = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

(d) $\cancel{T(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^t}$.

(e) $\cancel{T(\mathbf{A}) = \mathbf{B}^t\mathbf{A}\mathbf{B}}$.

3. Sejam $\mathbf{V} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais e $h \in \mathbb{R}$ fixado. Mostre que cada uma das funções $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ abaixo é uma transformação linear:

   (a) $(Tf)(x) = f(x + h)$. (Deslocamento)

   (b) $(Tf)(x) = f(x + h) - f(x)$. (Diferença para frente)

   (c) $(Tf)(x) = f(x) - f(x - h)$. (Diferença para trás)

   (d) $(Tf)(x) = f(x + \frac{h}{2}) - f(x - \frac{h}{2})$. (Diferença central)

   (e) $(Tf)(x) = \frac{1}{2}\left(f(x + \frac{h}{2}) - f(x - \frac{h}{2})\right)$. (Valor médio)

4. (**Operador Integração**) Seja $V = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais contínuas. Mostre que a função $J : V \to V$ definida por

$$(Jf)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

   é uma transformação linear.

5. (**Operador Cisalhamento na direção de** x) Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisfaça $T(1, 0) = (1, 0)$ e $T(0, 1) = (a, 1)$, onde $a \in \mathbb{R}^*$. Defina **Operador Cisalhamento na direção de** y.

6. Determine o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisfaça $T(1, 2) = (1, 1)$ e $T(0, 1) = (1, 0)$.

7. Determine o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisfaça $T(1, 0) = (a, b)$ e $T(0, 1) = (c, d)$.

8. Seja $V = P(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes reais. Mostre que cada uma das funções $T : V \to V$ abaixo é uma transformação linear:

   (a) $(Tp)(x) = xp(x)$ (Multiplicação por x).

   (b) $(Tp)(x) = \frac{p(x) - a_0}{x}$ (Eliminação do termo constante e divisão por x).

9. Sejam $S : V \to W$ e $T : V \to W$ transformações lineares. Mostre que $S + T$ e aT, para todo $a \in \mathbb{R}$, são lineares. Conclua que o conjunto de todas as transformações lineares $L(V, W)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

10. Se $\dim V = 2$ e $\dim W = 3$, determine uma base de $L(V, W)$. (Sugestão: Sejam $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ bases de V e W, respectivamente. Então as transformações lineares
$$E_{ij}(\mathbf{v}_k) = \delta_{ik}\mathbf{w}_j = \begin{cases} \mathbf{w}_j & \text{se } i = k \\ \mathbf{0} & \text{se } i \neq k \end{cases}, i = 1, 2 \text{ e } j = 1, 2, 3,$$
estão bem definidas e são únicas. Agora mostre que o conjunto
$$\{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}\}$$
é uma base de $L(V, W)$). Generalize.

11. Sejam $R : U \to V$, $S : U \to V$ e $T : V \to W$ transformações lineares. Mostre que $T \circ S$ é uma transformação linear e
$$T \circ (R + S) = T \circ R + T \circ S.$$

12. Sejam $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares definidos por $R(x, y) = (x, 0)$, $S(x, y) = (y, x)$ e $T(x, y) = (0, y)$. Determine:

    (a) $S + T$ e $3S - 5T$.

    (b) $R \circ S$, $S \circ R$, $R \circ T$, $T \circ R$, $S \circ T$ e $T \circ S$.

    (c) R^2, S^2 e T^2.

    (d) Mostre que S e T são LI.

13. Sejam $V = P(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes reais e $D : V \to V$ e $M : V \to V$ operadores lineares definidos por
$$(Dp)(x) = p'(x) \text{ e } (Mp)(x) = xp(x).$$
Mostre que $MD - DM = I$ e $(DM)^2 = D^2M^2 + DM$.

14. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $f : V \to W$ uma função. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

    (a) Se $\mathbf{w} - \mathbf{u} = c(\mathbf{v} - \mathbf{w})$, então $f(\mathbf{w}) - f(\mathbf{u}) = c(f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w}))$, para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e $c \in \mathbb{R}$;

    (b) $f(\mathbf{z}) = T(\mathbf{z}) + \mathbf{x}$, para todo $\mathbf{z} \in V$, onde $\mathbf{x} \in W$ e $T : V \to W$ é uma transformação linear;

    (c) $f(\sum_{i=0}^{n} c_i\mathbf{u}_i) = \sum_{i=0}^{n} c_i f(\mathbf{u}_i)$, para todo $\mathbf{u}_i \in V$ e $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, com $c_1 + \cdots + c_n = 1$.

(Sugestão: $(a \Rightarrow b)$ Sejam $\mathbf{x} = f(\mathbf{0}) \in W$ e $T : V \to W$ definida por $T(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) - \mathbf{x}$. Agora, vamos provar que T é linear. Como $\mathbf{y} - c\mathbf{y} = (c-1)(\mathbf{0} - \mathbf{y})$ temos que

$$T(\mathbf{y}) - T(c\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) - f(c\mathbf{y}) = (c-1)[f(\mathbf{0}) - f(\mathbf{y})] = (c-1)(-T(\mathbf{y})).$$

Logo, $T(c\mathbf{y}) = cT(\mathbf{y})$, para todo $\mathbf{y} \in V$ e $c \in \mathbb{R}$. Finalmente, como

$$2\mathbf{z} - (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{z} - \mathbf{y} = -\frac{1}{2}(2\mathbf{y} - 2\mathbf{z})$$

temos que

$$\begin{aligned} 2T(\mathbf{z}) - T(\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= T(2\mathbf{z}) - T(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = f(2\mathbf{z}) - f(\mathbf{y} + \mathbf{z}) \\ &= -\frac{1}{2}[f(2\mathbf{y}) - f(2\mathbf{z})] = -[T(\mathbf{y}) - T(\mathbf{z})]. \end{aligned}$$

Portanto, $T(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = T(\mathbf{y}) + T(\mathbf{z})$, para todos $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$.)

15. Seja $T : V \to V$ um operador linear tal que $T^k = T \circ T \circ \cdots \circ T = 0$, para algum $k \in \mathbb{N}$.

    (a) Mostre que se $\mathbf{u} \in V$ é tal que $T^{k-1}(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$, então o conjunto

    $$\{\mathbf{u}, T(\mathbf{u}), \ldots, T^{k-1}(\mathbf{u})\}$$

    é LI.

    (b) Mostre que se

    $$W = [\mathbf{u}, T(\mathbf{u}), \ldots, T^{k-1}(\mathbf{u})],$$

    então $T(\mathbf{v}) \in W$, para todo $\mathbf{v} \in W$.

3.2 Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear. A *imagem* de T é o conjunto

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} T &= \{\mathbf{w} \in W : \mathbf{w} = T(\mathbf{u}), \text{ para algum } \mathbf{u} \in V\} \\ &= \{T(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in V\} \\ &= T(V) \end{aligned}$$

(confira Figura 3.5).

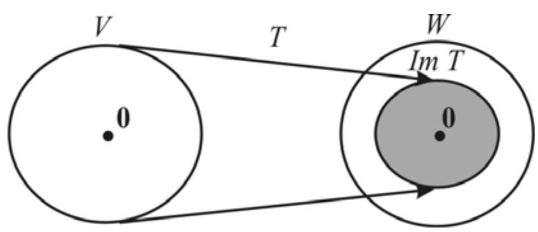

Figura 3.5: Representação gráfica da imagem de T.

O *núcleo* de T é o conjunto

$$\begin{aligned}\ker T &= \{\mathbf{u} \in V : T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\} \\ &= T^{-1}(\mathbf{0})\end{aligned}$$

(confira Figura 3.6).

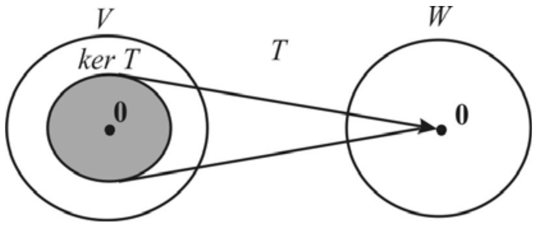

Figura 3.6: Representação gráfica do núcleo de T.

Teorema 3.18 *Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então $\operatorname{Im} T$ é um subespaço de W e $\ker T$ é um subespaço de V.*

Prova. Vamos provar apenas que $\operatorname{Im} T$ é um subespaço de W. É claro que $\operatorname{Im} T \neq \emptyset$, pois

$$\mathbf{0} = T(\mathbf{0}) \in \operatorname{Im} T.$$

Dados $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2 \in \operatorname{Im} T$ e $a \in \mathbb{R}$. Como $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2 \in \operatorname{Im} T$ temos que existem $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2 \in V$ tais que

$$\mathbf{w}_1 = T(\mathbf{u}_1) \text{ e } \mathbf{w}_2 = T(\mathbf{u}_2).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 &= T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2) \\ &= T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \in \operatorname{Im} T,\end{aligned}$$

pois $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in V$, e

$$\begin{aligned}a\mathbf{w}_1 &= aT(\mathbf{u}_1) \\ &= T(a\mathbf{u}_1) \in \operatorname{Im} T,\end{aligned}$$

pois $a\mathbf{u}_1 \in V$. Portanto, $\operatorname{Im} T$ é um subespaço de W. ■

Observação 3.19 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear com $\dim V = n$. Então*

$$\operatorname{posto}(T) = \dim \operatorname{Im} T \ \textit{ e } \ \operatorname{nul}(T) = \dim \ker T.$$

Exemplo 3.20 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por*

$$T(x, y, z) = (x, 2y, 0).$$

Determine o núcleo e a imagem de T.

Solução. Por definição

$$\begin{aligned}\ker T &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,2y,0) = (0,0,0)\} \\ &= \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= [(0,0,1)]\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} T &= \{T(x,y,z) : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x,2y,0) : x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1,0,0),(0,2,0)].\end{aligned}$$

Finalmente, como $T(1,0,0) = (1,0,0)$, $T(0,1,0) = (0,2,0)$ e $T(0,0,1) = (0,0,0)$ temos que

$$\operatorname{Im} T = [T(1,0,0), T(0,1,0)]$$

(confira Figura 3.7).

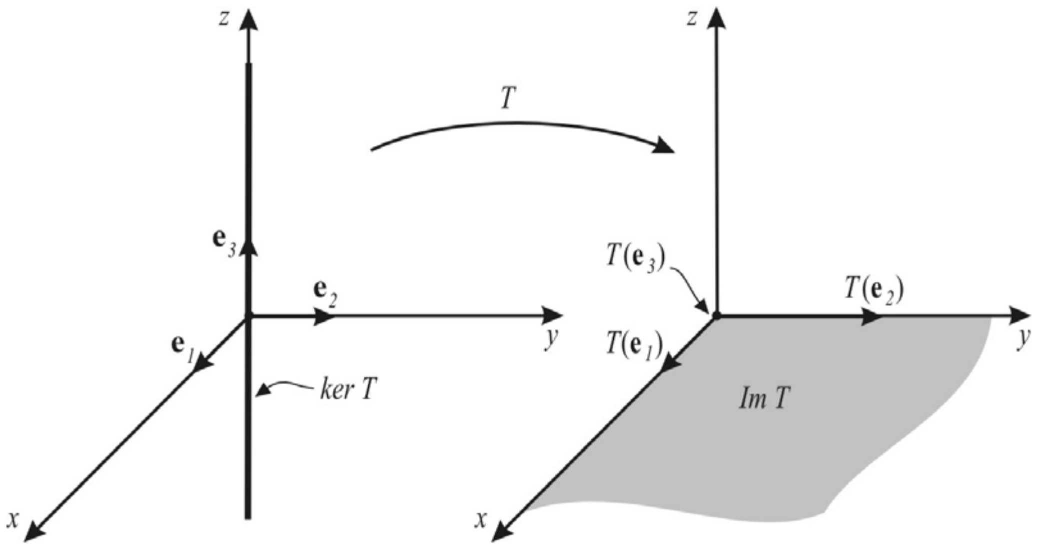

Figura 3.7: Representação gráfica do núcleo e da imagem de T.

Exemplo 3.21 *Determine uma transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *tal que*

$$\operatorname{Im} T = [(1,0,0,-1),(0,1,1,0)].$$

Solução. É fácil verificar que

$$\alpha = \{(1,0,0,-1),(0,1,1,0)\}$$

é uma base de $\operatorname{Im} T$. Como $(1,0,0,-1),(0,1,1,0) \in \operatorname{Im} T$ temos que existem $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$T(\mathbf{u}_1) = (1,0,0,-1) \text{ e } T(\mathbf{u}_2) = (0,1,1,0).$$

Seja $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$. Então $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ é uma base de W, pois α é uma base de $\operatorname{Im} T$.

Afirmação. $\mathbb{R}^3 = W \oplus \ker T$.

De fato, dado $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, temos que $T(\mathbf{u}) \in \operatorname{Im} T$. Logo, existem $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}) &= y_1(1,0,0,-1) + y_2(0,1,1,0) = y_1T(\mathbf{u}_1) + y_2T(\mathbf{u}_2) \\ &= T(y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2). \end{aligned}$$

Assim,

$$T(\mathbf{u} - (y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2)) = T(\mathbf{u}) - T(y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{u}) = \mathbf{0},$$

isto é,

$$\mathbf{u} - (y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2) \in \ker T.$$

Portanto, existe $\mathbf{v} \in \ker T$ tal que

$$\mathbf{u} - (y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2) = \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{u} = (y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2) + \mathbf{v} \in W + \ker T,$$

ou seja, $\mathbb{R}^3 = W + \ker T$. Agora, é fácil verificar que $W \cap \ker T = \{\mathbf{0}\}$. Escolhendo uma base $\{\mathbf{u}_3\}$ para $\ker T$, obtemos uma base

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$$

para $\mathbb{R}^3$. Em particular, escolhendo $\mathbf{u}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,0)$ e $\mathbf{u}_3 = (0,0,1)$ temos, pelo Teorema 3.12, que existe uma única transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$T(\mathbf{u}_1) = (1,0,0,-1), T(\mathbf{u}_2) = (0,1,1,0) \text{ e } T(\mathbf{u}_3) = (0,0,0,0).$$

Agora, para determinar T, dado $\mathbf{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos que

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= xT(\mathbf{u}_1) + yT(\mathbf{u}_2) + zT(\mathbf{u}_3) \\ &= (x,y,y,-x). \end{aligned}$$

Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear. Dizemos que T é *injetora* se

$$T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}, \ \forall \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbf{u} \neq \mathbf{v} \Rightarrow T(\mathbf{u}) \neq T(\mathbf{v}), \ \forall \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Dizemos que T é *sobrejetora* se dado $\mathbf{w} \in W$, existir $\mathbf{u} \in V$ tal que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$, isto é, $\operatorname{Im} T = W$. Finalmente, dizemos que T é *bijetora* se T é injetora e sobrejetora. Neste caso,

$$\mathbf{w} = T(\mathbf{u}) \Leftrightarrow \mathbf{u} = T^{-1}(\mathbf{w}).$$

Exemplo 3.22 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a transformação linear definida por* $T(x, y) = x$. *Então* T *é sobrejetora, pois*

$$\operatorname{Im} T = \{T(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x \cdot 1 : x \in \mathbb{R}\} = [1] = \mathbb{R}.$$

Mas não é injetora, pois $T(0, 1) = 0 = T(0, -1)$ *e* $(0, 1) \neq (0, -1)$.

Exemplo 3.23 *Seja* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear definida por* $T(x) = (x, 0)$. *Então* T *é injetora, pois*

$$T(x) = T(y) \Rightarrow (x, 0) = (y, 0) \Rightarrow x = y.$$

Mas não é sobrejetora, pois $T(x) \neq (0, 1)$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *isto é,* $\operatorname{Im} T \neq \mathbb{R}^2$.

Exemplo 3.24 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *a transformação linear definida por* $T(x, y, z) = (x, 2y, 0)$. *Então* T *não é injetora e nem sobrejetora, pois*

$$T(0, 0, 1) = (0, 0, 0) = T(0, 0, -1)$$

com $(0, 0, 1) \neq (0, 0, -1)$ *e* $T(x, y, z) \neq (0, 0, 1)$, *para todo* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, *isto é,* $\operatorname{Im} T \neq \mathbb{R}^3$.

Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear. Dizemos que T é *não-singular* se $\ker T = \{\mathbf{0}\}$. Caso contrário, dizemos que T é *singular*.

Teorema 3.25 *Sejam* V, W *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$ *e* $T : V \to W$ *uma transformação linear. Então* T *é não-singular se, e somente se,* T *é injetora.*

Prova. Suponhamos que T seja não-singular, isto é, $\ker T = \{\mathbf{0}\}$. Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, se $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$, então

$$T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

Logo, $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in \ker T = \{\mathbf{0}\}$. Portanto, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, ou seja, T é injetora. Reciprocamente, suponhamos que T seja injetora. Dado $\mathbf{u} \in \ker T$, temos que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Como $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ temos que

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{0} = T(\mathbf{0}) \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Assim, $\ker T = \{\mathbf{0}\}$. Portanto, T é não-singular. ■

Corolário 3.26 *Sejam* V, W *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$ *e* $T : V \to W$ *uma transformação linear. Então* T *é não-singular se, e somente se,* T *leva todo conjunto LI de* V *em algum conjunto LI de* W.

Prova. Suponhamos que T seja não-singular, isto é, $\ker T = \{\mathbf{0}\}$. Seja

$$\alpha = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

conjunto qualquer LI de V. Devemos provar que

$$T(\alpha) = \{T(\mathbf{u}_1), \ldots, T(\mathbf{u}_n)\}$$

é um conjunto LI de W. Sejam $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$x_1 T(\mathbf{u}_1) + \cdots + x_n T(\mathbf{u}_n) = \mathbf{0}.$$

Logo,

$$T(x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n) = x_1 T(\mathbf{u}_1) + \cdots + x_n T(\mathbf{u}_n) = \mathbf{0}.$$

Assim,

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n \in \ker T = \{\mathbf{0}\},$$

isto é,

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Logo, $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$, pois α é LI. Portanto,

$$\{T(\mathbf{u}_1), \ldots, T(\mathbf{u}_n)\}$$

é um conjunto LI de W. Reciprocamente, seja $\mathbf{u} \in \ker T$, com $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Então $\{\mathbf{u}\}$ é um conjunto LI de V. Assim, $\{T(\mathbf{u})\} = \{\mathbf{0}\}$ é um conjunto LI de W, o que é impossível. Portanto, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e T é não-singular. ■

Teorema 3.27 (Teorema do Núcleo e da Imagem) *Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, com $\dim V = n$, e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então*

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T \\ &= \operatorname{nul}(T) + \operatorname{posto}(T). \end{aligned}$$

Prova. Como $\ker T$ é um subespaço de V temos que $\ker T$ contém uma base

$$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$$

que é parte de uma base

$$\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

de V.

Afirmação. $\{T(\mathbf{u}_{k+1}), \ldots, T(\mathbf{u}_n)\}$ é uma base de $\operatorname{Im} T$.

De fato, dado $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} T$, existe $\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{w} = T(\mathbf{u})$. Como $\mathbf{u} \in V$ e β é uma base de V temos que existem $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_k\mathbf{u}_k + x_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + x_n\mathbf{u}_n.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= T(\mathbf{u})\\ &= T(x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_k\mathbf{u}_k + x_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + x_n\mathbf{u}_n)\\ &= x_{k+1}T(\mathbf{u}_{k+1}) + \cdots + x_nT(\mathbf{u}_n),\end{aligned}$$

pois $T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{0}$, $i = 1, \ldots, k$. Logo,

$$\{T(\mathbf{u}_{k+1}), \ldots, T(\mathbf{u}_n)\}$$

gera $\operatorname{Im} T$. Agora, para provar que

$$\{T(\mathbf{u}_{k+1}), \ldots, T(\mathbf{u}_n)\}$$

é um conjunto LI, sejam $y_{k+1}, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$y_{k+1}T(\mathbf{u}_{k+1}) + \cdots + y_nT(\mathbf{u}_n) = \mathbf{0}.$$

Então

$$T(y_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + y_n\mathbf{u}_n) = y_{k+1}T(\mathbf{u}_{k+1}) + \cdots + y_nT(\mathbf{u}_n) = \mathbf{0}.$$

Assim,

$$y_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + y_n\mathbf{u}_n \in \ker T.$$

Logo, existem $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$y_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + y_n\mathbf{u}_n = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_k\mathbf{u}_k.$$

Donde,

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_k\mathbf{u}_k + (-y_{k+1})\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + (-y_n)\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Como β é uma base de V temos que $y_{k+1} = \cdots = y_n = 0$ e

$$\{T(\mathbf{u}_{k+1}), \ldots, T(\mathbf{u}_n)\}$$

é um conjunto LI. Portanto,

$$\dim V = n = k + (n-k) = \dim\ker T + \dim\operatorname{Im} T.$$

■

Corolário 3.28 *Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, com $\dim V = \dim W = n$, e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então T é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.*

Prova. Suponhamos que T seja injetora. Então, pelo Teorema 3.25, $\ker T = \{\mathbf{0}\}$. Assim,

$$\dim W = \dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im} T.$$

Como $\operatorname{Im} T \subseteq W$ e $\dim W = \dim \operatorname{Im} T$ temos que $\operatorname{Im} T = W$. Portanto, T é sobrejetora. Reciprocamente, suponhamos que T seja sobrejetora. Então $\operatorname{Im} T = W$ e $\dim W = \dim \operatorname{Im} T$. Assim,

$$\dim \operatorname{Im} T = \dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T \Rightarrow \dim \ker T = 0.$$

Assim, $\ker T = \{\mathbf{0}\}$ e, pelo Teorema 3.25, T é injetora. ■

Corolário 3.29 *Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, com $\dim V = \dim W = n$, e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *T é bijetora.*

2. *T é não-singular.*

3. *T é sobrejetora.*

4. *T leva toda base de V em alguma base de W.* ■

Exemplo 3.30 *Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que*

$$\ker T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

Solução. É fácil verificar que

$$\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$$

é uma base de $\ker T$. Como $\ker T$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ temos que

$$\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$$

é parte de uma base de $\mathbb{R}^3$. Vamos estender este conjunto a uma base de $\mathbb{R}^3$, digamos

$$\{(1, 0, -1), (0, 1, -1), (0, 0, 1)\}.$$

Assim, definindo arbitrariamente $T(0, 0, 1)$, digamos $T(0, 0, 1) = (0, 0, 0, 1)$, temos, pelo Teorema 3.12, que existe uma única transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$T(1, 0, -1) = (0, 0, 0, 0), T(0, 1, -1) = (0, 0, 0, 0) \text{ e } T(0, 0, 1) = (0, 0, 0, 1).$$

Agora, para determinar T, dado $\mathbf{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, devemos encontrar $r, s, t \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{u} = r(1, 0, -1) + s(0, 1, -1) + t(0, 0, 1),$$

isto é, resolver o sistema não-homogêneo

$$\begin{cases} r = x \\ s = y \\ -r - s + t = z \end{cases}.$$

Logo,

$$T(x, y, z) = (0, 0, 0, x + y + z).$$

Teorema 3.31 *Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear bijetora. Então a transformação inversa $T^{-1} : W \to V$ é linear.*

Prova. É claro que $T^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, pois $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Dados $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2 \in W$, $a \in \mathbb{R}$ e T sendo bijetora temos que existem únicos $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2 \in V$ tais que

$$\mathbf{w}_1 = T(\mathbf{u}_1) \Leftrightarrow \mathbf{u}_1 = T^{-1}(\mathbf{w}_1) \text{ e } \mathbf{w}_2 = T(\mathbf{u}_2) \Leftrightarrow \mathbf{u}_2 = T^{-1}(\mathbf{w}_2).$$

Como

$$T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

temos que

$$T^{-1}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = T^{-1}(\mathbf{w}_1) + T^{-1}(\mathbf{w}_2).$$

Finalmente, como

$$T(a\mathbf{u}_1) = aT(\mathbf{u}_1) = a\mathbf{w}_1$$

temos que

$$T^{-1}(a\mathbf{w}_1) = a\mathbf{u}_1 = aT^{-1}(\mathbf{w}_1).$$

Portanto, T^{-1} é linear. ■

Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear. Dizemos que T é um *isomorfismo* se T é bijetora. Se existir um isomorfismo de V sobre W, dizemos que V é *isomorfo* a W e será denotado por $V \simeq W$. Intuitivamente, um isomorfismo T de V sobre W é uma regra que consiste em renomear os elementos de V, isto é, o nome do elemento sendo $T(\mathbf{u})$ ao invés de $\mathbf{u} \in V$.

Exemplo 3.32 *Mostre que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y)$ é um isomorfismo e determine uma regra para T^{-1} como a que define T.*

Solução. Como

$$\begin{aligned} \ker T &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 2y, z, x + y) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(0, 0, 0)\} \end{aligned}$$

temos que T é injetora. Portanto, T é isomorfismo. Assim, dado $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, existe um único $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x, y, z) = (a, b, c) \Leftrightarrow T^{-1}(a, b, c) = (x, y, z).$$

Logo,

$$(a, b, c) = (x - 2y, z, x + y),$$

isto é,

$$\begin{cases} x - 2y = a \\ z = b \\ x + y = c \end{cases}.$$

Assim,

$$x = \frac{a + 2c}{3}, y = \frac{c - a}{3} \text{ e } z = b.$$

Portanto,

$$T^{-1}(a, b, c) = \left(\frac{a + 2c}{3}, \frac{-a + c}{3}, b\right),$$

ou ainda,

$$T^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x + 2z}{3}, \frac{-x + z}{3}, y\right).$$

Teorema 3.33 *Todo espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{R}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Prova. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com $\dim V = n$ e

$$\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

uma base ordenada de V. Então para cada $\mathbf{u} \in V$ existem únicos $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{u}_i.$$

Vamos definir $T_\beta : \mathbb{R}^n \to V$ por

$$T_\beta(x_1, \ldots . x_n) = \mathbf{u}.$$

É fácil verificar que T_β está bem definida, é linear e injetora. Portanto, V é isomorfo a $\mathbb{R}^n$. ■

Observações 3.34 *1. A transformação linear $T_\beta : \mathbb{R}^n \to V$ é chamada a* parametrização *de V dada pela base β e T_β^{-1} é chamada de* isomorfismo de base canônica *de V associada com a base β.*

2. Sejam $T : V \to W$ um isomorfismo e $S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ um subconjunto de V. Então S é LI se, e somente se, $T(S)$ é LI. Portanto, ao decidirmos que S é LI não importa se consideramos S ou $T(S)$, confira Corolário 3.26.

EXERCÍCIOS

1. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear.

   (a) Mostre se U é um subespaço de V, então o conjunto
   $$T(U) = \{T(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in U\}$$
   é um subespaço de W.

   (b) Mostre que se Z é um subespaço de W, então o conjunto
   $$T^{-1}(Z) = \{\mathbf{u} \in V : T(\mathbf{u}) \in Z\}$$
   é um subespaço de V.

2. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear definido por $T(x, y) = (x + y, y)$,
   $$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} = 1\}, \;\; B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\} \text{ e} \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}. \end{aligned}$$
   Determine $T(A)$, $T(B)$ e $T(C)$.

3. Para cada tranformação linear abaixo determine o núcleo e a imagem:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (y - x, 0, 5x)$.

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x + y + z, z)$.

4. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Mostre que se
   $$\mathbf{V} = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n],$$
   então
   $$\operatorname{Im}(T) = [T(\mathbf{u}_1), \ldots, T(\mathbf{u}_n)].$$

5. Seja T de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ a função definida por
   $$T(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x + y, -x - 2y + 2z).$$

   (a) Verifique que T é uma transformação linear.

   (b) Se (a, b, c) é um vetor em $\mathbb{R}^3$, quais as condições sobre a, b e c, para que o vetor esteja na imagem de T? Qual é o posto de T?

(c) Quais as condições sobre a, b e c, para que o vetor esteja no núcleo de T? Qual é a nulidade de T?

6. Sejam $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ uma transformação linear. Mostre que se
$$\{T(\mathbf{u}_1), \ldots, T(\mathbf{u}_n)\}$$
é um conjunto linearmente independente de W, então
$$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$
é um conjunto linearmente independente de V.

7. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
$$\operatorname{Im} T = [(1, 0, -1), (1, 2, 2)] \, .$$

8. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
$$\operatorname{Im} T = [(1, 2, 3), (4, 0, 5)] \, .$$

9. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
$$\ker T = [(1, 1, 0)].$$

10. Determine uma transformação linear sobrejetora $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 1, 0) = T(0, 0, 1)$.

11. Existe uma transformação linear T de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$ tal que $T(1, -1, 1) = (1, 0)$ e $T(1, 1, 1) = (0, 1)$?

12. Existe uma transformação linear T de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ tal que $T(1, -1) = (1, 0)$, $T(2, -1) = (0, 1)$ e $T(-3, 2) = (1, 1)$?

13. Sejam $S : U \to V$ e $T : V \to W$ transformações lineares.

    (a) Mostre que $\operatorname{Im}(T \circ S) \subseteq \operatorname{Im} T$ e $\operatorname{posto}(T \circ S) \leq \operatorname{posto}(T)$.

    (b) Mostre que $\ker S \subseteq \ker(T \circ S)$ e $\operatorname{nul}(S) \leq \operatorname{nul}(S \circ T)$.

14. Sejam T_1 e T_2 operadores lineares de V tais que
$$\operatorname{nul}(T_1) = \operatorname{nul}(T_2) = 0.$$
Mostre que $\operatorname{nul}(T_1 \circ T_2) = 0$.

15. Sejam $S, T : V \to V$ operadores lineares com $\dim V = n$. Mostre que: