2.2 Subespaços Vetoriais

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W um subconjunto de V. Dizemos que W é um *subespaço* (*vetorial*) de V se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $W \neq \emptyset$.
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$, para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$.
3. $a\mathbf{u} \in W$, para todo $a \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} \in W$.

Observações 2.9 *1. Qualquer subespaço W de V contém o vetor nulo $\mathbf{0}$, pois quando $a = 0$, temos que*

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{u} \in W.$$

2. Pode ser provado que, se admitirmos estas duas propriedades em W, as oito propriedades de espaço vetorial são válidas em W. Desta forma, W é também um espaço vetorial com as propriedades herdadas de V.

3. Todo espaço vetorial V admite pelo menos dois subespaços, a saber, $\{\mathbf{0}\}$ e V, chamados de subespaços triviais *ou* impróprios*. Os demais subespaços de V são chamados de* subespaços não-triviais *ou* próprios*.*

Exemplo 2.10 *Sejam $V = \mathbb{R}^n$ e*

$$\begin{aligned} W &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in V : x_1 = 0\} \\ &= \{(0, x_2, \ldots, x_n) : x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Então W é um subespaço de V.

Solução. É claro que $W \neq \emptyset$, pois

$$\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in W.$$

Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ e $a \in \mathbb{R}$. Como $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ temos que

$$\mathbf{u} = (0, x_2, \ldots, x_n) \text{ e } \mathbf{v} = (0, y_2, \ldots, y_n)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (0 + 0, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ &= (0, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in W \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a\mathbf{u} &= (a0, ax_2, \ldots, ax_n) \\ &= (0, ax_2, \ldots, ax_n) \in W. \end{aligned}$$

Portanto, W é um subespaço de V.

Exemplo 2.11 *Sejam* $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ *e*

$$W = \{\mathbf{A} \in V : \mathbf{A}^t = \mathbf{A}\}$$

o conjunto das matrizes simétricas. Então W *é um subespaço de* V.

Solução. É claro que $W \neq \emptyset$, pois

$$\mathbf{O}^t = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{O} \in W.$$

Dados $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in W$ e $a \in \mathbb{R}$. Como $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in W$ temos que

$$\mathbf{A}^t = \mathbf{A} \text{ e } \mathbf{B}^t = \mathbf{B}.$$

Logo,

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t = \mathbf{A}+\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W$$

e

$$(a\mathbf{A})^t = a\mathbf{A}^t = a\mathbf{A} \Rightarrow a\mathbf{A} \in W.$$

Portanto, W é um subespaço de V.

Exemplo 2.12 *Sejam* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *uma matriz fixada,* $V = \mathbb{R}^{n\times 1}$ *e*

$$W = \{\mathbf{X} \in V : \mathbf{AX} = \mathbf{O}\}.$$

o conjunto solução do sistema homogêneo $\mathbf{AX} = \mathbf{O}$. *Então* W *é um subespaço de* V.

Solução. Fica como um exercício.

Exemplo 2.13 *Sejam* $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *o espaço vetorial de todas as funções reais e*

$$W = \{f \in V : f(-x) = f(x), \ \forall \ x \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto das funções pares. Então W *é um subespaço de* V.

Solução. É claro que $W \neq \emptyset$, pois

$$\mathbf{0}(-x) = 0 = \mathbf{0}(x), \ \forall \ x \in \mathbb{R}, \ \Rightarrow \mathbf{0} \in W.$$

Dados f, $g \in W$ e $a \in \mathbb{R}$. Como f, $g \in W$ temos que

$$f(x) = f(-x) \text{ e } g(x) = g(-x), \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}(f+g)(-x) &= f(-x) + g(-x)\\ &= f(x) + g(x)\\ &= (f+g)(x), \ \forall \ x \in \mathbb{R}, \ \Rightarrow f+g \in W\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(af)(-x) &= af(-x) = af(x)\\ &= (af)(x), \ \forall \ x \in \mathbb{R}, \ \Rightarrow af \in W.\end{aligned}$$

Portanto, W é um subespaço de V.

Exemplo 2.14 *Sejam* $V = P_n(\mathbb{R})$ *com* $n \geq 2$ *e*

$$W = \{p \in V : p(1) = p(7) = 0\}.$$

Então W *é um subespaço de* V.

Solução. É claro que $W \neq \emptyset$, pois

$$\mathbf{0}(1) = \mathbf{0}(7) = 0 \Rightarrow \mathbf{0} \in W.$$

Dados p, $q \in W$ e $a \in \mathbb{R}$. Como p, $q \in W$ temos que

$$p(1) = p(7) = 0 \text{ e } q(1) = q(7) = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} (p+q)(1) &= p(1) + q(1) = 0 + 0 = 0 \text{ e} \\ (p+q)(7) &= p(7) + q(7) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow p + q \in W \end{aligned}$$

e

$$(ap)(1) = ap(1) = a \cdot 0 = 0 \text{ e } (ap)(7) = ap(7) = a \cdot 0 = 0 \Rightarrow ap \in W.$$

Portanto, W é um subespaço de V.

Exemplo 2.15 *Sejam* $V = \mathbb{R}^n$ *e*

$$W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V : x_2 = x_1 + 1\}.$$

Então W *não é um subespaço de* V*, pois*

$$\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \notin W.$$

Exemplo 2.16 *Sejam* $V = \mathbb{R}^2$ *e*

$$W = \{(x_1, x_2) \in V : x_2 = |x_1|\}.$$

Então W *não é um subespaço de* V*, pois* $\mathbf{u} = (-1, 1) \in W$ *e* $\mathbf{v} = (2, 2) \in W$ *mas*

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1, 3) \notin W.$$

Note que $\mathbf{0} = (0, 0) \in W$*. Portanto,* $\mathbf{0} \in W$ *é condição necessária mas não suficiente para que* W *seja um subespaço de* V.

Teorema 2.17 *Seja* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$*. Se* W_1 *e* W_2 *são subespaços de* V*, então* $W_1 \cap W_2$ *é um subespaço de* V.

Prova. É claro que $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, pois

$$\mathbf{0} \in W_1 \text{ e } \mathbf{0} \in W_2 \Rightarrow \mathbf{0} \in W_1 \cap W_2.$$

Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1 \cap W_2$ e $a \in \mathbb{R}$. Como $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1 \cap W_2$ temos que $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_2$. Assim, por hipótese,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_1, \;\; \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_2$$

e

$$a\mathbf{u} \in W_1, \;\; a\mathbf{u} \in W_2.$$

Logo,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_1 \cap W_2 \text{ e } a\mathbf{u} \in W_1 \cap W_2.$$

Portanto, $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V. ■

Exemplo 2.18 *Sejam* $V = \mathbb{R}^3$,

$$W_1 = \{(x, y, z) \in V : x = 0\} \;\; e \;\; W_2 = \{(x, y, z) \in V : y = 0\}$$

subespaços de V (*prove isto*!). *Determine* $W_1 \cap W_2$.

Solução. Dado $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_1 \cap W_2$, obtemos $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_1$ e $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_2$. Logo, $x = 0$ e $y = 0$. Portanto, $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_1 \cap W_2$ se, e somente se, $x = y = 0$ e z qualquer. Assim,

$$W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z) \in V : x = y = 0\}.$$

Exemplo 2.19 *Sejam* $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \in V : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \;\; e \;\; W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in V : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

subespaços de V (*prove isto*!). *Determine* $W_1 \cap W_2$.

Solução. Dado

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2,$$

temos que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W_1 \text{ e } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W_2.$$

Logo, $d = 0$, $b = 0$ e $c = 0$. Portanto,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2$$

se, e somente se, $b = c = d = 0$ e a qualquer. Assim,

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in V : a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pergunta. $W_1 \cup W_2$ é um subespaço de V? A resposta desta pergunta é, em geral, não. De fato, sejam $V = \mathbb{R}^2$,

$$W_1 = \{(x, y) \in V : y = 0\} \text{ e } W_2 = \{(x, y) \in V : x = 0\}$$

subespaços de V (prove isto!). Então $W_1 \cup W_2$ não é um subespaço de V, pois

$$\mathbf{u} = (1, 0) \in W_1 \cup W_2 \text{ e } \mathbf{v} = (0, 1) \in W_1 \cup W_2$$

mas

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1, 1) \notin W_1 \cup W_2.$$

Teorema 2.20 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Se W_1 e W_2 são subespaços de V, então o conjunto*

$$W_1 + W_2 = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 : \mathbf{u}_1 \in W_1 \text{ e } \mathbf{u}_2 \in W_2\}$$

é um subespaço de V. Note que $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$.

Prova. Como $\mathbf{0} \in W_1$ e $\mathbf{0} \in W_2$ temos que $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in W_1 + W_2$. Logo, $W_1 + W_2 \neq \emptyset$. Agora, dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1 + W_2$ e $a \in \mathbb{R}$. Como $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1 + W_2$ temos que existem $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \in W_1$ e $\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2 \in W_2$ tais que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Assim, por hipótese,

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 \in W_1, \;\; \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2 \in W_2$$

e

$$a\mathbf{u}_1 \in W_1, \;\; a\mathbf{u}_2 \in W_2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \\ &= (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2) \in W_1 + W_2 \end{aligned}$$

e

$$a\mathbf{u} = a(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = a\mathbf{u}_1 + a\mathbf{u}_2 \in W_1 + W_2.$$

Portanto, $W_1 + W_2$ é um subespaço de V. ■

Exemplo 2.21 *Sejam $V = \mathbb{R}^3$,*

$$W_1 = \{(x, y, z) \in V : x = 0\} \text{ e } W_2 = \{(x, y, z) \in V : y = z = 0\}$$

subespaços de V (prove isto!). Determine $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$.

Solução. Dado $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_1 \cap W_2$, obtemos $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_1$ e $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_2$. Logo, $x = 0$ e $y = z = 0$. Portanto, $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_1 \cap W_2$ se, e somente se, $x = y = z = 0$. Assim,

$$W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, 0)\}.$$

Agora, dado $\mathbf{u} \in W_1 + W_2$, existem $\mathbf{u}_1 = (0, y, z) \in W_1$ e $\mathbf{u}_2 = (x, 0, 0) \in W_2$, com $x, y, z \in \mathbb{R}$, tais que

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = (x, y, z).$$

Portanto,

$$W_1 + W_2 = V.$$

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W_1, W_2 subespaços de V. Dizemos que V é decomposto em *soma direta* de W_1 e W_2, em símbolos $V = W_1 \oplus W_2$, se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $V = W_1 + W_2$.
2. $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Exemplo 2.22 *Sejam* $V = \mathbb{R}^3$,

$$W_1 = \{(x, y, z) \in V : x = 0\} \text{ e } W_2 = \{(x, y, z) \in V : y = z = 0\}$$

subespaços de V*. Então, pelo Exemplo* 2.21, $V = W_1 \oplus W_2$.

Exemplo 2.23 *Sejam* $V = \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$W_1 = \{\mathbf{A} \in V : \mathbf{A}^t = \mathbf{A}\} \text{ e } W_2 = \{\mathbf{A} \in V : \mathbf{A}^t = -\mathbf{A}\}$$

subespaços de V*. Mostre que* $V = W_1 \oplus W_2$.

Solução. Dado $\mathbf{A} \in W_1 \cap W_2$, temos que $\mathbf{A} \in W_1$ e $\mathbf{A} \in W_2$. Logo,

$$\mathbf{A}^t = \mathbf{A} \text{ e } \mathbf{A}^t = -\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A} = -\mathbf{A} \Rightarrow 2\mathbf{A} = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{O}.$$

Assim, $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{O}\}$. Agora, dado $\mathbf{A} \in V$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= 1 \cdot \mathbf{A} \\
&= (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})\mathbf{A} \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{A} \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^t - \frac{1}{2}\mathbf{A}^t + \frac{1}{2}\mathbf{A} \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^t) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^t).
\end{aligned}$$

É fácil verificar que

$$\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^t) \in W_1 \text{ e } \frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^t) \in W_2.$$

Portanto, $V = W_1 + W_2$.

EXERCÍCIOS

---

1. Mostre todas as afirmações deixadas nesta seção.

2. Seja $V = \mathbb{R}^3$. Verifique quais dos subconjuntos abaixo são subespaços de V.

   (a) $W = \{(x,y,z) \in V : x+y+z=0\}$.

   (b) $W = \{(x,y,z) \in V : x \leq y \leq z\}$.

   (c) $W = \{(x,y,z) \in V : x-3z=0\}$.

   (d) $W = \{(x,y,z) \in V : x \in \mathbb{Z}\}$.

   (e) $W = \{(x,y,z) \in V : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

   (f) $W = \{(x,y,z) \in V : x \geq 0\}$.

   (g) $W = \{(x,y,z) \in V : xy = 0\}$.

   (h) $W = \{(x,y,z) \in V : x = z^2\}$.

Considere $n=2$

3. Seja $V = \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$. Verifique quais dos subconjuntos abaixo são subespaços de V.

$\mathbb{R}^{2\times 2} = M_{2\times 2}$

   (a) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : a = c \text{ e } b+d=0 \right\}$.

   (b) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : a+d \leq b+c \right\}$.

   (c) $W = \{\mathbf{A} \in V : \mathbf{AB} = \mathbf{BA},\ \mathbf{B} \text{ uma matriz fixa em } V\}$.

   (d) $W = \{\mathbf{A} \in V : \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\}$.

   (e) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : ad-bc \neq 0 \right\}$.

   (f) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : ad-bc = 0 \right\}$.

4. Seja $V = P_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Verifique quais dos subconjuntos abaixo são subespaços de V.

   (a) $W = \{p \in V : p(0) = 0\}$.

Polinômios de grau no máximo n (considere $n=3$)

(b) $W = \{p \in V : p(0) = 2p(1)\}$.

(c) $W = \{p \in V : p(x) + p'(x) = 0\}$.

(d) $W = \{p \in V : p(2) = 0 \text{ e } p(5) \neq 0\}$.

(e) $W = \{p \in V : p = a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_{2k}x^{2k} \text{ e } 2k \leq n\}$.

5. Seja $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais. Verifique quais dos subconjuntos abaixo são subespaços de V.

(a) $W = \{f \in V : f(0) = 1\}$.

(b) $W = \{f \in V : f(5) = 0\}$.

(c) $W = \{f \in V : f(3) = f(5)\}$.

(d) $W = \{f \in V : f \text{ é contínua}\}$.

(e) $W = \{f \in V : f \text{ é derivável}\}$.

(f) $W = \{f \in V : f \text{ é integrável}\}$.

6. Sejam W_1,W_2 e W_3 os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\right\}, \quad W_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\right\}, \\ W_3 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\}. \end{aligned}$$

É verdade que $W_1 + W_2 = W_1 + W_3 = W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$? Em algum dos casos a soma é direta?

7. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W_1, W_2 subespaços de V. Mostre que $V = W_1 \oplus W_2$ se, somente se, todo vetor $\mathbf{v}$ em V pode ser escrito de modo único sob a forma $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, onde $\mathbf{w}_1 \in W_1$ e $\mathbf{w}_2 \in W_2$.

8. Considere

$$W_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\right\}.$$

Encontre um subespaço W_2 de $\mathbb{R}^2$ tal que $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$.

7. Sejam $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais e

$$\begin{aligned} W_1 &= \{f \in V : f(-x) = f(x), \ \forall \ x \in \mathbb{R}\}, \\ W_2 &= \{f \in V : f(-x) = -f(x), \ \forall \ x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

subespaços de V. Mostre que $V = W_1 \oplus W_2$.

8. Sejam $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais e $r \in \mathbb{R}_+^*$ fixado. Mostre que o conjunto

$$W_r = \{f \in V : f(x) = 0, \ \forall \ x \in [-r, r]\}$$

é um subespaço de V.

9. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W_1,W_2 subespaços de V. Mostre que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço de V se, e somente se, $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$.

10. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W_1, W_2, W_3 subespaços de V.

    (a) Mostre que $(W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3) \subseteq W_1 \cap (W_2 + W_3)$.

    (b) Mostre que $W_1 + (W_2 \cap W_3) \subseteq (W_1 + W_2) \cap (W_1 + W_3)$.

    (c) Mostre, com um exemplo, que as inclusões acima podem ser estritas.

    (d) Mostre que se $W_3 \subseteq W_1$, então vale a igualdade.

11. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W_1, W_2 subespaços de V tais que $V = W_1 \oplus W_2$. Dizemos que um subespaço U de V é *adaptado* a esta decomposição se

$$U = (U \cap W_1) \oplus (U \cap W_2).$$

    (a) Determine um exemplo de uma decomposição e um subespaço que não seja adaptado à decomposição.

    (b) Mostre que se $W_1 \subseteq U$ ou $W_2 \subseteq U$, então U é adaptado a decomposição.

2.3 Combinação Linear

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um vetor $\mathbf{u}$ em V é uma *combinação linear* dos vetores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ em V se existirem escalares $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{u}_i.$$

Exemplo 2.24 *Sejam $V = \mathbb{R}^4$ e*

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, -2, 1),\ \ \mathbf{u}_2 = (3, 0, 4, -1),\ \ \mathbf{u}_3 = (-1, 2, 5, 2)$$

vetores em V. Quais dos vetores $\mathbf{u} = (4, -5, 9, -7)$, $\mathbf{v} = (3, 1, -4, 4)$ e $\mathbf{w} = (-1, 1, 0, 1)$ são combinações lineares dos vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$?

Solução. Para resolver este problema devemos verificar se a equação vetorial

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}$$

tem solução, onde $\mathbf{u} = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in V$. Mas isto é equivalente a determinar condições sobre b_1, b_2, b_3 e b_4, de modo que o sistema não-homogêneo

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = b_1 \\ x_1 + 2x_3 = b_2 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = b_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = b_4 \end{cases}$$

tenha solução. Para resolver o sistema, vamos reduzir a matriz ampliada à forma em escada

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & \vdots & b_1 \\ 1 & 0 & 2 & \vdots & b_2 \\ -2 & 4 & 5 & \vdots & b_3 \\ 1 & -1 & 2 & \vdots & b_4 \end{bmatrix} \to \cdots \to \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{8b_1+19b_2-6b_3}{39} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{3b_1-b_2+b_3}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{-4b_1+10b_2+3b_3}{39} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{3b_1-14b_2+b_3+13b_4}{13} \end{bmatrix}$$

Portanto, pelo item 2 das Observações 1.19, o vetor $\mathbf{u} = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in V$ é combinação linear dos vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ se, e somente se,

$$\frac{3b_1 - 14b_2 + b_3 + 13b_4}{13} = 0 \Leftrightarrow b_3 = -3b_1 + 14b_2 - 13b_4.$$

Assim, $\mathbf{u} = (4, -5, 9, -7)$ é combinação linear dos vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$, pois

$$9 = -12 - 70 + 91 \text{ e } \mathbf{u} = -3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3,$$

$\mathbf{v} = (3, 1, -4, 4)$ não é combinação linear dos vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$, pois

$$-4 \neq -9 + 14 - 52$$

e $\mathbf{w} = (-1, 1, 0, 1)$ não é combinação linear dos vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$, pois

$$0 \neq 3 + 14 - 13.$$

Teorema 2.25 *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ vetores fixados em V. Então o conjunto*

$$W = \{x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{u}_i : x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

é um subespaço de V.

Prova. É claro que $W \neq \emptyset$, pois

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{u}_1 + \cdots + 0\mathbf{u}_n \in W.$$

Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ e $a \in \mathbb{R}$. Como $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ temos que existem

$$x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$$

tais que

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n \text{ e } \mathbf{v} = y_1\mathbf{u}_1 + \cdots + y_n\mathbf{u}_n.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n) + (y_1\mathbf{u}_1 + \cdots + y_n\mathbf{u}_n) \\ &= (x_1 + y_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (x_n + y_n)\mathbf{u}_n \in W \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a\mathbf{u} &= a(x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n) \\ &= (ax_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (ax_n)\mathbf{u}_n \in W. \end{aligned}$$

Portanto, W é um subespaço de V. ■

O subespaço

$$W = \{x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{u}_i : x_i \in \mathbb{R}\right\}$$

de V é chamado o *subespaço gerado por* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$. Mais geralmente, seja β um subconjunto não-vazio de V. Então

$$W = \left\{\sum_{i=1}^{k} x_i\mathbf{u}_i : x_i \in \mathbb{R} \text{ e } \mathbf{u}_i \in \beta\right\}$$

é o subespaço de V *gerado por* β, onde β é o conjunto de *geradores* de V, e será denotado por

$$W = [\beta].$$

Quando $\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, denotamos $[\beta]$ por $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$.

Exemplo 2.26 *Sejam* $V = \mathbb{R}^3$ *e* $\mathbf{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$ $i = 1, 2, 3$*, vetores em* V*. Determine* $W = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$.

Solução. Por definição

$$\begin{aligned} W &= \{x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) : x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Portanto, $W = V$, isto é, todo vetor $\mathbf{u}$ em V pode ser escrito como uma combinação dos vetores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$.

Exemplo 2.27 *Sejam* $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ *e*

$$\mathbf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vetores em V*. Determine* $W = [\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}]$.

Solução. Por definição

$$\begin{aligned} W &= \{a\mathbf{E}_{11} + b\mathbf{E}_{12} + c\mathbf{E}_{21} + d\mathbf{E}_{22} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

Portanto, $W = V$, isto é, todo vetor $\mathbf{u}$ em V pode ser escrito como uma combinação dos vetores $\mathbf{E}_{11}$, $\mathbf{E}_{12}$, $\mathbf{E}_{21}$ e $\mathbf{E}_{22}$.

Exemplo 2.28 *Sejam* $V = P_3(\mathbb{R})$ *e*

$$p_i = x^i, \ \ i = 0, 1, 2, 3,$$

vetores em V. *Determine* $W = [p_0, p_1, p_2, p_3]$.

Solução. Por definição

$$\begin{aligned} W &= \{a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Portanto, $W = V$, isto é, todo vetor $\mathbf{u}$ em V pode ser escrito como uma combinação dos vetores p_0, p_1, p_2 e p_3.

Exemplo 2.29 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *e* W_1,W_2 *subespaços de* V. *Mostre que* $W_1 + W_2$ *é o menor subespaço de* V *contendo* W_1 *e* W_2*, isto é,*

$$W_1 + W_2 = [W_1, W_2] = [W_1 \cup W_2] .$$

Solução. Já vimos que $W_1 + W_2$ é um subespaço de V. Como $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{0} \in W_1 + W_2$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{w}_2 \in W_1 + W_2$ temos que

$$W_1 \subseteq W_1 + W_2 \text{ e } W_2 \subseteq W_1 + W_2.$$

Logo,

$$W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2 \text{ e } [W_1 \cup W_2] \subseteq W_1 + W_2.$$

Por outro lado, se $\mathbf{w} \in W_1 + W_2$, então existem $\mathbf{w}_1 \in W_1$ e $\mathbf{w}_2 \in W_2$ tais que

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = 1 \cdot \mathbf{w}_1 + 1 \cdot \mathbf{w}_2.$$

Assim, todo vetor $\mathbf{w} \in W_1 + W_2$ é uma combinação linear de vetores em $W_1 \cup W_2$. Consequentemente,

$$W_1 + W_2 \subseteq [W_1 \cup W_2] .$$

Portanto, $W_1 + W_2 = [W_1 \cup W_2]$.

Finalmente, seja W qualquer subespaço de V tal que $W_1 \subseteq W$ e $W_2 \subseteq W$. Então

$$W_1 \cup W_2 \subseteq W \text{ e } [W_1 \cup W_2] \subseteq W,$$

pois todo vetor de $[W_1 \cup W_2]$ é uma combinação linear de vetores em $W_1 \cup W_2$ e W é um subespaço de V. Portanto, $W_1 + W_2 \subseteq W$.

Exemplo 2.30 *Determine todos os subespaços de* $\mathbb{R}^2$.

Solução. Seja W um subespaço qualquer de $\mathbb{R}^2$. Então

$$\begin{aligned} W_1 &= \{x \in \mathbb{R} : x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 = (x, y) \in W, \text{ para algum } y \in \mathbb{R}\} \text{ e} \\ W_2 &= \{y \in \mathbb{R} : y\mathbf{e}_2 = (0, y) \in W\} \end{aligned}$$

são subespaços de $\mathbb{R}$ (prove isto!). Logo, existem $x_0, y_1 \in \mathbb{R}$ tais que

$$W_1 = [x_0] \text{ e } W_2 = [y_1].$$

Assim, pela definição destes subespaços, podemos encontrar $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{u}_0 = (x_0, y_0) \in W$ e $\mathbf{u}_1 = (0, y_1) \in W$.

Afirmação. $W = [\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1]$.

De fato, dado $\mathbf{u} = (x, y) \in W$, $x \in W_1$, de modo que $x = ax_0$, para algum $a \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\mathbf{u} - a\mathbf{u}_0 = (0, y - ay_0) \in W \Rightarrow y - ay_0 \in W_2.$$

Logo, $y - ay_0 = by_1$, para algum $b \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$\mathbf{u} = (x, y) = (ax_0, ay_0 + by_1) = a\mathbf{u}_0 + b\mathbf{u}_1,$$

isto é, $W = [\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1]$.

EXERCÍCIOS

---

1. Mostre que todo vetor em $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $(1, 2)$ e $(5, 0)$. Que relação existe entre $\mathbb{R}^2$ e $[(1, 2), (5, 0)]$?

2. Sejam $V = P_2(\mathbb{R})$ e
$$f = 2 - 3x + 5x^2, g = -8 + 5x - 2x^2$$
vetores em V. Quais dos vetores $p = -26 + 11x + 7x^2$ e $q = 1 + x + x^2$ são combinações lineares dos vetores f e g?

3. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e
$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, -2), \mathbf{u}_2 = (3, 0, 4)$$
vetores em V. Quais dos vetores $\mathbf{u} = (4, -5, 9)$, $\mathbf{v} = (3, 1, -4)$ e $\mathbf{w} = (-1, 1, 0)$ são combinações lineares dos vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$?

4. Sejam $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ e
$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$
vetores em V. Quais dos vetores
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 9 & -7 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$
são combinações lineares dos vetores $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{A}_3$?

5. Encontre os geradores para os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

   (a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$.

   (b) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = x - 2y = 0\}$.

   (c) $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0\}$.

   ~~(d) $W_1 \cap W_2$~~.

   ~~(e) $W_2 + W_3$~~.

6. Sejam $V = \mathbb{R}^4$ e

$$W = \{(x, y, z, t) \in V : x + 2y - 2z = 0 \text{ e } t = 0\}$$

   um subespaço de V. Quais dos vetores $\mathbf{u} = (-2, 4, 3, 0)$, $\mathbf{v} = (6, 2, 4, 1)$ e $\mathbf{w} = (-2, 1, 0, 0)$ estão em W?

7. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, -2), \mathbf{u}_2 = (3, 0, 4), \mathbf{u}_3 = (-1, 1, 0)$$

   vetores em V. Determine o valor de k de modo que $(4, -5, k) \in [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$.

8. Sejam $V = P_3(\mathbb{R})$ e

$$p_0 = 1, \;\; p_1 = 1 - x, \;\; p_2 = (1 - x)^2, \;\; p_3 = (1 - x)^3$$

   vetores em V. Quais dos vetores em V são combinações lineares dos vetores p_0, p_1, p_2 e p_3?

9. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ dois vetores não-nulos de $\mathbb{R}^2$ e suponhamos que não exista um escalar a tal que $\mathbf{u} = a\mathbf{v}$. Mostre que

$$\mathbb{R}^2 = [\mathbf{u}] \oplus [\mathbf{v}].$$

2.4 Dependência e Independência Linear

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$. Dizemos que os vetores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ são *linearmente dependentes* (*LD*) se existirem escalares $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, não todos iguais a 0, tais que

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}. \tag{2.1}$$

Ou, equivalentemente, a equação vetorial (2.1) admite uma solução não-nula. Caso contrário, dizemos que os vetores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ são *linearmente independentes* (*LI*) ou, equivalentemente, a equação vetorial (2.1) admite apenas a solução nula.

Mais geralmente, sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e β um subconjunto não-vazio de V. Dizemos que β é LI se para quaisquer vetores distintos $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ em β, temos que

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0} \Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0,$$

isto é, todo subconjunto finito de β é LI. Caso contrário, β é LD.

Exemplo 2.31 *Sejam* $V = \mathbb{R}^3$ *e*

$$\mathbf{u}_1 = (3, 0, -3), \mathbf{u}_2 = (-1, 1, 2), \mathbf{u}_3 = (4, 2, -2), \mathbf{u}_4 = (2, 1, 1)$$

vetores em V*. Verifique se os vetores* $\mathbf{u}_1$*,* $\mathbf{u}_2$*,* $\mathbf{u}_3$ *e* $\mathbf{u}_4$ *são* LI *ou* LD*.*

Solução. Para resolver este problema devemos resolver a equação vetorial

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3 + x_4\mathbf{u}_4 = \mathbf{0},$$

onde $\mathbf{0} = (0, 0, 0) \in V$. Mas isto é equivalente a resolver o sistema homogêneo

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ \phantom{3x_1 - {}} x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Para resolver o sistema, vamos considerar a matriz dos coeficientes do sistema e reduzí-la à forma em escada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, nosso sistema é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

Escolhendo, $x_3 = c \in \mathbb{R}$, temos que

$$S = \{(-2c, -2c, c, 0) : c \in \mathbb{R}\}$$

é o conjunto solução do sistema. Em particular, se $c = 1$, então $(-2, -2, 1, 0)$ é uma solução não-nula do sistema. Portanto, os vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ e $\mathbf{u}_4$ são LD, isto é,

$$-2\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + 0\mathbf{u}_4 = \mathbf{0}.$$

Exemplo 2.32 *Sejam* $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *o espaço vetorial de todas as funções reais e*

$$\mathbf{u}_1 = e^x, \mathbf{u}_2 = e^{2x}$$

vetores em V*. Verifique se os vetores* $\mathbf{u}_1$ *e* $\mathbf{u}_2$ *são* LI *ou* LD*. Note que* $\mathbf{u}_1$ *e* $\mathbf{u}_2$ *são soluções da equação diferencial*

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Solução. Para resolver este problema devemos resolver a equação vetorial

$$ae^x + be^{2x} = \mathbf{0}, \ \forall \ x \in \mathbb{R},$$

onde $\mathbf{0}$ é a função identicamente nula. Diferenciando ambos os membros desta equação, temos que

$$ae^x + 2be^{2x} = \mathbf{0}, \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Logo, subtraindo a primeira equação da segunda, resulta que

$$be^{2x} = \mathbf{0}, \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Assim, $b = 0$ e, da primeira equação, $ae^x = \mathbf{0}$. Logo, $a = 0$. Portanto, os vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são LI.

Exemplo 2.33 *Seja* $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tal que*

$$a_{ij} < 0 \ \textit{se} \ i \neq j \ \textit{e} \ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} > 0, \ \textit{para} \ i = 1, \ldots, n.$$

Mostre que $\mathbf{A}$ *é não-singular.*

Solução. Suponhamos, por absurdo, que $\mathbf{A}$ seja singular. Então as colunas de $\mathbf{A}$ são LD. Logo, existem escalares $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = 0, \ i = 1, \ldots, n, \tag{2.2}$$

isto é, o sistema (2.2) possui uma solução não-nula $(x_1, \ldots, x_n)$. Assim, fazendo

$$|x_j| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

e multiplicando a solução do sistema (2.2) por -1, se necessário, podemos supor que $x_j > 0$. Agora, considerando a j-ésima equação do sistema (2.2), temos que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k = a_{jj}x_j + \sum_{k=1, k\neq j}^{n} a_{jk}x_k \geq a_{jj}x_j + \sum_{k=1, k\neq j}^{n} a_{jk}x_j = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\right) x_j > 0,$$

o que é uma contradição.

Exemplo 2.34 (Regra de Cramer) *Sejam* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e* $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n$ *as colunas da matriz* $\mathbf{A}$*. Mostre que se existirem* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *tais que* $\mathbf{B} = x_1\mathbf{C}_1 + \cdots + x_n\mathbf{C}_n$*, então*

$$x_j \det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_{j-1} & \mathbf{B} & \mathbf{C}_{j+1} & \cdots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix}.$$

Em particular, se $\det \mathbf{A} \neq 0$*, então*

$$x_j = \frac{\det \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_{j-1} & \mathbf{B} & \mathbf{C}_{j+1} & \cdots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix}}{\det \mathbf{A}},$$

isto é, o sistema de equações lineares $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *tem uma única solução.*

Solução. Suponhamos que existam $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{B} = x_1\mathbf{C}_1 + \cdots + x_n\mathbf{C}_n.$$

Então

$$x_1\mathbf{C}_1 + \cdots + x_{j-1}\mathbf{C}_{j-1} + 1 \cdot (x_j\mathbf{C}_j - \mathbf{B}) + x_{j+1}\mathbf{C}_{j+1} + \cdots + x_n\mathbf{C}_n = \mathbf{O}.$$

Logo, as colunas da matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_{j-1} & x_j\mathbf{C}_j - \mathbf{B} & \mathbf{C}_{j+1} & \cdots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix}$$

são LD. Assim, pela Proposição 1.5, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \det\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_{j-1} & x_j\mathbf{C}_j - \mathbf{B} & \mathbf{C}_{j+1} & \cdots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix} \\ &= x_j \det \mathbf{A} - \det\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_{j-1} & \mathbf{B} & \mathbf{C}_{j+1} & \cdots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$x_j \det \mathbf{A} = \det\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_{j-1} & \mathbf{B} & \mathbf{C}_{j+1} & \cdots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.35 *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$. O conjunto $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ é LD se, e somente se, um destes vetores for combinação linear dos outros.*

Prova. Suponhamos que o conjunto $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ seja LD. Então, por definição, existem escalares $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Como os escalares $x_1, \ldots, x_n$ não são todos nulos temos que existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_i \neq 0$. Logo,

$$\mathbf{u}_i = (-\frac{x_1}{x_i})\mathbf{u}_1 + \cdots + (-\frac{x_{i-1}}{x_i})\mathbf{u}_{i-1} + (-\frac{x_{i+1}}{x_i})\mathbf{u}_{i+1} + \cdots + (-\frac{x_n}{x_i})\mathbf{u}_n.$$

Reciprocamente, suponhamos que um destes vetores seja combinação linear dos outros, digamos

$$\mathbf{u}_j = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_{j-1}\mathbf{u}_{j-1} + x_{j+1}\mathbf{u}_{j+1} + \cdots + x_n\mathbf{u}_n.$$

Logo, a equação vetorial

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_{j-1}\mathbf{u}_{j-1} + (-1)\mathbf{u}_j + x_{j+1}\mathbf{u}_{j+1} + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

admite pelo menos uma solução não-nula, a saber, $(x_1, \ldots, x_{j-1}, -1, x_{j+1}, \ldots, x_n)$. Portanto, o conjunto $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ é LD ■

Corolário 2.36 *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ vetores em V com pelo menos dois vetores não-nulos. O conjunto $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ é LD se, e somente se, um destes vetores for combinação linear dos precedentes.*

Prova. Suponhamos que o conjunto $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ seja LD. Então, por definição, existem escalares $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Seja k o maior inteiro tal que $x_k \neq 0$. Então

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}.$$

Se $k = 1$, então $x_1\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ e, assim, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$, o que é impossível. Portanto, $k > 1$ e

$$\mathbf{u}_k = (-\frac{x_1}{x_k})\mathbf{u}_1 + \cdots + (-\frac{x_{k-1}}{x_k})\mathbf{u}_{k-1}.$$

■

Exemplo 2.37 *Seja* $V = \mathbb{R}^2$*. Então os vetores* $\mathbf{u}_1 = (1, -1)$*,* $\mathbf{u}_2 = (1, 1)$ *e* $\mathbf{u}_3 = (1, 0)$ *são LD, pois*

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2.$$

EXERCÍCIOS

---

1. Seja $V = \mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ e $\mathbf{v} = (y_1, \ldots, y_n) \in V$. Mostre que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são LD se, e somente se, existe um escalar $a \in \mathbb{R}$ tal que $y_i = ax_i$, $i = 1, \ldots, n$.

2. Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vetores de um espaço V. Se $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é um conjunto LI, mostre que:

   (a) $\{\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w}, \mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{w}\}$ é um conjunto LI.

   (b) $\{\mathbf{u} + \mathbf{v} - 3\mathbf{w}, \mathbf{u} + 3\mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}\}$ é um conjunto LD.

3. Sejam $\mathbf{u} = (a, b)$, $\mathbf{v} = (c, d)$ vetores de $\mathbb{R}^2$. Mostre que o conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é LD se, e somente se, $ad = bc$.

4. O conjunto $\{1, x, x^2, 2 + x + 2x^2\}$ é LI ou LD em $P_2(\mathbb{R})$? O que se pode afirmar a respeito de qualquer um de seus subconjuntos com três elementos?

5. Encontre um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ tal que $[\mathbf{u}] = W_1 \cap W_2$, onde

$$W_1 = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)] \text{ e } W_2 = [(1, 2, 3), (1, -1, 1)].$$

6. Em quais condições sobre o escalar k, o conjunto

$$\left\{(1, 0, k), (1, 1, k), \left(1, 1, k^2\right)\right\}$$

   é LI em $\mathbb{R}^3$?

7. Seja $V = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais contínuas. Quais dos subconjuntos abaixo são LI em V.

   (a) $\{x, x+1, x^2-1\}$.

   (b) $\{x+5, x^2-x, x^2+x-10\}$.

   (c) $\{(x+1)^2, 2x, x+\frac{1}{2}\}$.

   (d) $\{(x+1)^2, x^2-1, x+1\}$.

   (e) $\{1-x, x(1-x), 1-x^2\}$.

   (f) $\{1, e^x, e^{-x}\}$.

   (g) $\{\operatorname{sen} x, \cos x, \tan x\}$.

8. Responda verdadeiro (V) ou falso (F). Justifique.

   ( ) Todo conjunto que contém um subconjunto LD é LD?

   ( ) Todo subconjunto de um conjunto LI é LI?

   ( ) Todo conjunto que contém dois vetores iguais é LI?

   ( ) Todo conjunto que contém o vetor nulo é LI?

9. Sejam $V = \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}$. Mostre que o conjunto $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ é LI se, e somente se, o conjunto $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i + a\mathbf{u}_j, \ldots, \mathbf{u}_j \ldots, \mathbf{u}_m\}$ é LI, para todos $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, com $i < j$.

2.5 Bases e Dimensão

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um conjunto $\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ de vetores em V é uma *base* de V se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ é LI.

2. $V = [\alpha] = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$.

Ou, equivalentemente,

$$V = [\mathbf{u}_1] \oplus [\mathbf{u}_2] \oplus \cdots \oplus [\mathbf{u}_n].$$

Mais geralmente, um subconjunto não-vazio β de V é uma base de V se β é LI e $[\beta] = V$.

Observação 2.38 *Pode ser provado, usando o Lema de Zorn, que todo espaço vetorial $V \neq \{\mathbf{0}\}$ possui uma base.*

Exemplo 2.39 *Seja $V = \mathbb{R}^3$. É fácil verificar que o conjunto*

$$\beta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$$

é uma base finita de V, a qual é chamada de base canônica *de V.*

Exemplo 2.40 *Sejam* $V = P(\mathbb{R})$ *o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes reais e*

$$\beta = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}.$$

Então β *é uma base infinita de* V*, a qual é chamada de* base canônica *de* V*.*

Solução. Sejam $p_i = x^i, p_{i+1} = x^{i+1}, \ldots, p_{i+n} = x^{i+n}$ vetores distintos de V com $i \geq 0$. Se

$$c_1 p_i + \cdots + c_n p_{i+n} = \mathbf{0},$$

então, pela igualdade de polinômios, temos que $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Logo, β é LI. É claro que $[\beta] = V$, pois todo vetor p em V é da forma

$$p = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Portanto, β é uma base infinita de V.

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Dizemos que V é de *dimensão finita* se ele possui uma base finita, por exemplo, $V = \mathbb{R}^3$ é de dimensão finita. Caso contrário, V é de *dimensão infinita.*

Teorema 2.41 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *e* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *vetores em* V *tais que*

$$V = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n].$$

Então, dentre estes vetores, podemos extrair uma base de V*.*

Prova. Se os vetores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ são LI, nada há para ser provado. Caso contrário, pelo Teorema 2.35, temos que um destes vetores é combinação linear dos outros, digamos

$$\mathbf{u}_n = x_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + x_{n-1} \mathbf{u}_{n-1}.$$

Logo,

$$V = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}].$$

Se os vetores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}$ são LI, nada há para ser provado. Caso contrário, pelo Teorema 2.35, temos que um destes vetores é combinação linear dos outros, digamos

$$\mathbf{u}_{n-1} = x_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + x_{n-2} \mathbf{u}_{n-2}.$$

Logo,

$$V = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}] = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-2}].$$

Continuando desta maneira (em no máximo $n - 1$ etapas), obtemos uma base de V. ■

Exemplo 2.42 *Sejam* $V = \mathbb{R}^3$ *e* $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$*,* $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 0)$*,* $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$*,* $\mathbf{u}_4 = (1, 1, 1)$ *vetores em* V *tais que*

$$V = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4].$$

Determine dentre estes vetores uma base de V*.*

Solução. Para resolver este problema devemos verificar se os vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ e $\mathbf{u}_4$ são LI ou LD, isto é, verificar se a equação vetorial

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3 + x_4\mathbf{u}_4 = \mathbf{0}$$

tem solução nula ou não, onde $\mathbf{0} = (0, 0, 0) \in V$. Mas isto é equivalente a determinar se o sistema homogêneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

tem solução. É fácil verificar que

$$S = \{(0, -c, -c, c) : c \in \mathbb{R}\}$$

é o conjunto solução do sistema. Em particular, se $c = 1$, então $(0, -1, -1, 1)$ é uma solução não-nula do sistema. Portanto, os vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ e $\mathbf{u}_4$ são LD e

$$\mathbf{u}_4 = 0\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3.$$

Assim,

$$V = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$$

e o conjunto $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ é uma base de V (prove isto!).

Teorema 2.43 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ tal que*

$$V = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m].$$

Então todo conjunto com mais de m vetores em V é LD. Assim, todo conjunto de vetores LI em V possui no máximo m vetores.

Prova. Como

$$V = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m]$$

temos, pelo Teorema 2.41, que existe uma base de V dentre os vetores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$. Logo, reenumerando, se necessário, podemos supor que

$$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\},$$

com $k \leq m$, seja uma base de V. Seja

$$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

um conjunto de vetores em V com $n > m$. Como $\mathbf{v}_j \in V$ e $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ é uma base de V temos que existem $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{v}_j = a_{1j}\mathbf{u}_1 + \cdots + a_{kj}\mathbf{u}_k, j = 1, \ldots, n.$$

Agora, vamos estudar a combinação linear

$$
\begin{aligned}
x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n &= \sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{v}_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{k} a_{ij}\mathbf{u}_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}\right) \mathbf{u}_i.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = 0, i = 1, \ldots, k,$$

ou seja, basta discutir o sistema homogêneo com k equações e n incógnitas

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = 0, i = 1, \ldots, k.$$

Como $n > m \geq k$ temos, pelo item 2. das Observações 1.19, que este sistema tem pelo menos uma solução não-nula

$$(y_1, \ldots, y_n).$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n &= \sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij}\right) \mathbf{u}_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} 0\mathbf{u}_i = \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Portanto, o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é LD. ■

Corolário 2.44 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Se*

$$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\} \text{ e } \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

são duas bases quaisquer de V, então $m = n$.

Prova. Como $V = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m]$ e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é um conjunto LI temos, pelo Teorema 2.43, que $n \leq m$. Por outro lado, como $V = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ e $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ é um conjunto LI temos, pelo Teorema 2.43, que $m \leq n$. Portanto, $m = n$. ■

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. A *dimensão* de V é o número de elementos em alguma base de V e será denotada por $\dim V$ou $\dim_{\mathbb{R}} V$. Note, pelo Corolário 2.44, que esta definição não depende da base de V, isto é, está bem definida. Quando $V = \{\mathbf{0}\}$, convencionamos que $\dim V = 0$.

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\alpha = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ um subconjunto qualquer de vetores de V. O *posto* de α é definido por

$$\text{posto}(\alpha) = \dim[\alpha].$$

Lema 2.45 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Seja $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ um subconjunto LI em V. Então $\mathbf{u} \in V - [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m]$ se, e somente se, $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}\}$ é um conjunto LI.*

Prova. Sejam $x_1, \ldots, x_m, y$ escalares em $\mathbb{R}$ tais que

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_m\mathbf{u}_m + y\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Então $y = 0$, pois se $y \neq 0$, então

$$\mathbf{u} = (-\frac{x_1}{y})\mathbf{u}_1 + \cdots + (-\frac{x_m}{y})\mathbf{u}_m \Rightarrow \mathbf{u} \in [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m],$$

o que é impossível. Assim, $y = 0$ e

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_m\mathbf{u}_m = \mathbf{0}.$$

Logo, por hipótese,

$$x_1 = \cdots = x_m = 0.$$

Portanto, $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}\}$ é um conjunto LI. ■

Teorema 2.46 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e W um subespaço de V. Então todo conjunto de vetores LI em W é parte de uma base de W.*

Prova. Seja $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ um conjunto de vetores LI em W. Se

$$W = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m],$$

acabou. Caso contrário, existe pelo Lema 2.45

$$\mathbf{u}_{m+1} \in W - [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m] \text{ tal que } \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m+1}\}$$

é LI em W. Se

$$W = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m+1}],$$

acabou. Caso contrário, existe pelo Lema 2.45

$$\mathbf{u}_{m+2} \in W - [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m+1}] \text{ tal que } \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m+1}, \mathbf{u}_{m+2}\}$$

é LI em W. Continuando desta maneira (em no máximo $\dim V$ etapas), obtemos o conjunto

$$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m+1}, \mathbf{u}_{m+2}, \ldots, \mathbf{u}_n\},$$

que é uma base de W. ■

Corolário 2.47 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Se W é um subespaço próprio de V, então $\dim W < \dim V$. Além disso, se $\dim V = n$, então todo conjunto com n vetores LI em V é uma base de V.*

Prova. Como $W \neq \{\mathbf{0}\}$ temos que existe $\mathbf{u}$ em W com $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. É claro que $\{\mathbf{u}\}$ é um conjunto LI em W. Assim, pelo Teorema 2.46, existe uma base de W contendo $\mathbf{u}$ e no máximo $\dim V$ elementos. Logo, $\dim W \leq \dim V$. Como $W \subsetneq V$ temos que existe $\mathbf{v} \in V$ tal que $\mathbf{v} \notin W$. Assim, acrescentando $\mathbf{v}$ a uma base de W, obtemos um conjunto LI para V. Portanto, $\dim W < \dim V$. ■

Exemplo 2.48 *Seja $V = \mathbb{R}^3$. Verifique se os vetores $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$ é parte de uma base de V.*

Solução. Para resolver este problema devemos verificar se os vetores $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$ são LI, isto é, resolver a equação vetorial

$$x_1(1, 1, 0) + x_2(0, 1, 1) = (0, 0, 0).$$

Mas isto é equivalente a verificar se o sistema homogêneo

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

tem solução. É fácil verificar que $x_1 = x_2 = 0$. Logo, os vetores $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$ são LI. Portanto, os vetores $(1, 1, 0), (0, 1, 1)$ é parte de uma base de V. Agora, para determinar

$$\mathbf{u} = (b_1, b_2, b_3) \in V - [(1, 1, 0), (0, 1, 1)],$$

devemos primeiro encontrar os vetores $\mathbf{u} = (b_1, b_2, b_3)$ tais que

$$x_1(1, 1, 0) + x_2(0, 1, 1) = \mathbf{u},$$

isto é, resolver o sistema não-homogêneo

$$\begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_1 + x_2 = b_2 \\ x_2 = b_3 \end{cases}.$$

Logo, o vetor $\mathbf{u} = (b_1, b_2, b_3) \in V$ é combinação linear dos vetores $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$ se, e somente se, $b_2 = b_1 + b_3$. Portanto,

$$\mathbf{u} = (b_1, b_2, b_3) \in V - [(1, 1, 0), (0, 1, 1)] \Leftrightarrow b_2 \neq b_1 + b_3.$$

Em particular,

$$\mathbf{u} = (1, 1, 1) \in V - [(1, 1, 0), (0, 1, 1)].$$

Assim, os vetores $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ e $(1, 1, 1)$ são LI em V. Como $\dim V = 3$ temos que

$$\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$$

é uma base de V.

Teorema 2.49 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Se W_1 e W_2 são subespaços de V, então*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Prova. Como $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de W_1 e W_2 temos, pelo Teorema 2.46, que $W_1 \cap W_2$ contém uma base

$$\alpha = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$$

que é parte de uma base

$$\alpha \cup \beta, \ \text{ onde } \ \beta = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$$

de W_1 e parte de uma base

$$\alpha \cup \gamma, \ \text{ onde } \ \gamma = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$$

de W_2. Note que os conjuntos α, β e γ são dois a dois disjuntos (confira Figura 2.1).

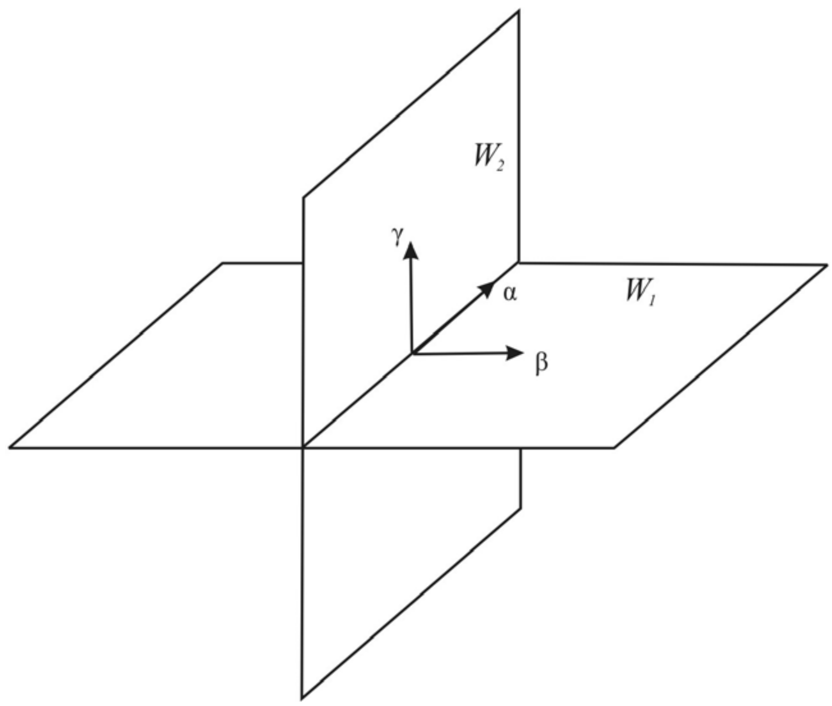

Figura 2.1: Interseção dos subespaços W_1 e W_2.

Afirmação. O conjunto $\delta = \alpha \cup \beta \cup \gamma$ é uma base de $W_1 + W_2$.
De fato, é claro que o conjunto δ gera $W_1 + W_2$. Agora, suponhamos que

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbf{v}_j + \sum_{l=1}^{n} z_l \mathbf{w}_l = \mathbf{0}.$$

Então
$$-\left(\sum_{l=1}^{n} z_l \mathbf{w}_l\right) = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbf{v}_j \in W_1.$$
Logo,
$$-\left(\sum_{l=1}^{n} z_l \mathbf{w}_l\right) \in W_1 \cap W_2.$$
Assim, existem $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$ tais que
$$-\left(\sum_{l=1}^{n} z_l \mathbf{w}_l\right) = t_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + t_k \mathbf{u}_k,$$
ou seja,
$$\sum_{i=1}^{k} t_i \mathbf{u}_i + \sum_{l=1}^{n} z_l \mathbf{w}_l = \mathbf{0}.$$
Como γ é LI temos que $z_1 = \cdots = z_n = 0$. Logo,
$$\sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}.$$
Como β é LI temos que
$$x_1 = \cdots = x_k = y_1 = \cdots = y_m = 0.$$
Portanto, δ é um conjunto LI. Logo,
$$\begin{aligned}
\dim W_1 + \dim W_2 &= (m+k) + (n+k) \\
&= (m+n+k) + k \\
&= \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2).
\end{aligned}$$

■

Exemplo 2.50 *Sejam $V = \mathbb{R}^4$,*
$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in V : y + z + t = 0\}$$
e
$$W_2 = \{(x, y, z, t) \in V : x + y = 0 \ \text{ e } \ z - 2t = 0\}.$$
subespaços de V.

1. *Determine uma base de $W_1 + W_2$ e $\dim(W_1 + W_2)$.*

2. *V é soma direta de W_1 e W_2?*

Solução. Note que

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x,y,z,t) \in V : y+z+t=0\} \\ &= \{(x,y,z,-y-z) \in V : x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,0,0,0)+(0,y,0,-y)+(0,0,z,-z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)]. \end{aligned}$$

e $\dim W_1 = 3$. De modo análogo, mostra-se que

$$W_2 = [(1,-1,0,0),(0,0,2,1)]$$

e $\dim W_2 = 2$. Agora, para determinar uma base de W_1+W_2, podemos escalonar a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, o conjunto

$$\alpha = \{(1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1),(1,-1,0,0)\}$$

é uma base de $W_1 + W_2$ e $\dim(W_1 + W_2) = 4$. Assim, $V = \mathbb{R}^4 = W_1 + W_2$, pois $W_1 + W_2 \subseteq V$. Como

$$\begin{aligned} \dim(W_1 \cap W_2) &= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) \\ &= 3 + 2 - 4 = 1 \end{aligned}$$

temos que V não é soma direta de W_1 e W_2. Note que, para determinar uma base de $W_1 \cap W_2$ basta resolver o sistema

$$\begin{cases} y+z+t=0 \\ x+y=0 \\ z-2t=0 \end{cases}.$$

Assim, $W_1 \cap W_2 = [(3,-3,2,1)]$.

Exemplo 2.51 *Sejam* $V = \mathbb{R}^3$,

$$W_1 = [(1,0,-1),(0,1,2)] \text{ e } W_2 = [(1,2,3),(1,-1,1)].$$

subespaços de V.

1. *Determine uma base de* $W_1 \cap W_2$ *e a* $\dim(W_1 \cap W_2)$.

2. *V é soma direta de W_1 e W_2?*

Solução. É fácil verificar que $\dim W_1 = 2$ e $\dim W_2 = 2$. Agora, para determinar uma base para $W_1 \cap W_2$, devemos primeiro determinar os vetores $\mathbf{u} = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$ que estão nos subespaços W_1 e W_2, isto é, escalonar as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & x \\ 0 & 1 & \vdots & y \\ -1 & 2 & \vdots & z \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & x \\ 2 & -1 & \vdots & y \\ 3 & 1 & \vdots & z \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & x \\ 0 & 1 & \vdots & y \\ -1 & 2 & \vdots & z \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & x \\ 0 & 1 & \vdots & y \\ 0 & 0 & \vdots & x - 2y + z \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & x \\ 2 & -1 & \vdots & y \\ 3 & 1 & \vdots & z \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & \frac{x+y}{3} \\ 0 & 1 & \vdots & \frac{2x-y}{3} \\ 0 & 0 & \vdots & \frac{-5x-2y+3z}{3} \end{bmatrix}.$$

Logo, pelo item 2. das Observações 1.19,

$$W_1 = \{(x, y, z) \in V : x - 2y + z = 0\} \text{ e } W_2 = \{(x, y, z) \in V : -5x - 2y + 3z = 0\}.$$

Finalmente, basta resolver o sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -5x - 2y + 3z = 0 \end{cases}.$$

Assim, $W_1 \cap W_2 = [(1, 2, 3)]$ e $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$. Portanto, V não é soma direta de W_1 e W_2 mas $V = W_1 + W_2$, pois

$$\dim(W_1 + W_2) = 2 + 2 - 1 = 3 = \dim V \text{ e } W_1 + W_2 \subseteq V.$$

EXERCÍCIOS

---

1. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e W_1, W_2 subespaços de V tais que $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$. É possível obtermos
$$W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, 0)\}?$$

2. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e W_1, W_2 subespaços V tais que $\dim W_1 = 1$, $\dim W_2 = 2$ e $W_1 \not\subseteq W_2$. Mostre que $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

3. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W_1, W_2 subespaços V, onde $\dim W_1 = 4$, $\dim W_2 = 5$ e $\dim V = 7$. Determine os possíveis valores para $\dim(W_1 \cap W_2)$.

4. Seja $V = \mathbb{R}^4$. Determine uma base e a dimensão dos subespaços

$$\begin{aligned} W_1 &= [(1,4,-1,3),(2,1,-3,-1),(0,2,1,-5)] \text{ e} \\ W_2 &= [(1,-4,-2,1),(1,-3,-1,2),(3,-8,-2,7)]. \end{aligned}$$

5. Sejam $V = \mathbb{R}^3$,

$$W_1 = \{(x,y,z) \in V : x = 0\} \text{ e } W_2 = [(1,2,0),(3,1,2)]$$

subespaços de V. Determine uma base e a dimensão para W_1, W_2, $\cancel{W_1 + W_2}$ e $\cancel{W_1 \cap W_2}$.

6. Sejam $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : b = -a \right\} \text{ e } W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : c = -a \right\}.$$

subespaços de V. Determine uma base e a dimensão para W_1, W_2, $\cancel{W_1 + W_2}$ e $\cancel{W_1 \cap W_2}$. ~~É verdade que~~ $\cancel{\mathbb{R}^{2\times 2} = W_1 \oplus W_2}$?

7. Seja $V = P_3(\mathbb{R})$. Determine uma base e a dimensão do subespaço

$$W = \{p \in V : p'(x) = 0\}.$$

8. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e o conjunto de vetores $\beta = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ em V, onde

$$\mathbf{u} = (1-a, 1+a) \text{ e } \mathbf{v} = (1+a, 1-a).$$

Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$ para que β não seja uma base de V.

9. Sejam $V = P_2(\mathbb{R})$ e $p = 2x^2 - 3x + 1 \in V$. O conjunto $\beta = \{p, p', p''\}$ é uma base de V?

10. Mostre que o conjunto

$$\beta = \left\{(1-x)^3, (1-x)^2, 1-x, 1\right\}$$

é uma base de $P_3(\mathbb{R})$.

11. Seja $V = \mathbb{R}^4$. Quais dos subconjuntos abaixo são bases de V?

(a) $\{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(1,0,0,1)\}$.

(b) $\{(1,3,-2,4),(1,1,5,9),(2,0,-13,23),(1,5,1,-2)\}$.

(c) $\{(1,1,1,1),(3,2,0,3),(0,-1,0,3),(4,2,1,7)\}$.