Resolução da terceira avaliação

(1) Pelo pequeno teorema de Fermat, temos que

$$3^6 \equiv 1 \pmod 7$$

Portanto $3^{996} \equiv 1 \pmod 7$, já que 996 é múltiplo de 6.

Assim $$3^{1000} = 3^4 \cdot 3^{996} \equiv 3^4 \pmod 7$$
$$\equiv 81 \pmod 7$$
$$\equiv 4 \pmod 7$$

Assim $3^{1000} - 4 \equiv 0 \pmod 7$, isto é, $7 \mid 3^{1000} - 4$. //

(2) Se $a \equiv b \pmod n$ então $a-b$ é múltiplo de n

Se $a \equiv b \pmod m$ então $a-b$ é múltiplo de m.

Assim $a-b$ é múltiplo comum de m e n e portanto

$\mathrm{mmc}(m,n) \mid a-b$, ou seja $a \equiv b \pmod{\mathrm{mmc}(m,n)}$

Reciprocamente se $a \equiv b \pmod{\mathrm{mmc}(m,n)}$ então $a-b = k\,\mathrm{mmc}(m,n)$ p/ algum $k \in \mathbb{Z}$. Mas $\mathrm{mmc}(m,n) = r \cdot m$ p/ algum $r \in \mathbb{Z}$ e $\mathrm{mmc}(m,n) = s \cdot n$ p/ algum $s \in \mathbb{Z}$.

Portanto

$$a-b = krm \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow a \equiv b \pmod m$$

e

$$a-b = ksn \Rightarrow n \mid a-b \Rightarrow a \equiv b \pmod n$$ //

Resolução da terceira avaliação

(1) Pelo pequeno teorema de Fermat, temos que

$$3^6 \equiv 1 \pmod 7$$

Portanto $3^{996} \equiv 1 \pmod 7$, já que 996 é múltiplo de 6.

Assim
$$\begin{aligned} 3^{1000} = 3^4 \cdot 3^{996} &\equiv 3^4 \pmod 7 \\ &\equiv 81 \pmod 7 \\ &\equiv 4 \pmod 7 \end{aligned}$$

Assim $3^{1000} - 4 \equiv 0 \pmod 7$, isto é, $7 \mid 3^{1000} - 4$. //

(2) Se $a \equiv b \pmod n$ então $a-b$ é múltiplo de n

Se $a \equiv b \pmod m$ então $a-b$ é múltiplo de m.

Assim $a-b$ é múltiplo comum de m e n e portanto

$\text{mmc}(m,n) \mid a-b$, ou seja $a \equiv b \pmod{\text{mmc}(m,n)}$

Reciprocamente se $a \equiv b \pmod{\text{mmc}(m,n)}$ então $a-b = k\,\text{mmc}(m,n)$ p/ algum $k \in \mathbb{Z}$. Mas $\text{mmc}(m,n) = r \cdot m$ p/ algum $r \in \mathbb{Z}$ e $\text{mmc}(m,n) = s \cdot n$ p/ algum $s \in \mathbb{Z}$.

Portanto

$$a-b = krm \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow a \equiv b \pmod m$$

e

$$a-b = ksn \Rightarrow n \mid a-b \Rightarrow a \equiv b \pmod n.$$

//

(3) Resolução do sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$$

Via teorema chinês do resto, chegamos na solução $x = 23$.

Esta é a menor solução positiva, visto que $0 < 23 < 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$

(4) Precisamos calcular o resto da divisão de 3^{400} por 100.

Note que $\varphi(100) = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 40$.

Logo $3^{40} \equiv 1 \pmod{100}$. Portanto

$$3^{400} = \left(3^{40}\right)^{10} \equiv 1^{10} \equiv 1 \pmod{100}$$

Assim, os últimos dois dígitos de 3^{400} são 0 e 1.

(5)

Seja $n = n_m 10^m + n_{m-1} 10^{m-1} + \dots + n_1 10 + n_0$

Logo $n = 10\left(n_m 10^{m-1} + \dots + n_1\right) + n_0$

Portanto

$$n \equiv n_0 \pmod 5 \quad \text{já que} \quad 10\left(n_m 10^{m-1} + \dots + n_1\right) \equiv 0 \pmod 5$$

Assim, $5 \mid n \Leftrightarrow 5 \mid n_0$. Como $0 \leq n_0 \leq 9$, temos que

$n_0 = 0$ ou $n_0 = 5$, cqd. //