Resolução da Segunda Avaliação

(2) $a \in \mathbb{Z}$ é tal que

$$a = 35q + 23 \quad , \text{p/ algum } q \in \mathbb{Z}.$$ (Pois a deixa resto 23 na divisão por 35)

Daí,

$$a = 7 \cdot 5q + 21 + 2$$
$$= 7 \cdot 5q + 7 \cdot 3 + 2 = 7(5q + 3) + 2.$$

Como $5q + 3 \in \mathbb{Z}$ e $0 < 2 < 7$, temos que o resto da divisão de a por 7 é 2. //

(3) a) Mostrar que $7 \mid 8^n + 6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Vamos usar a propriedade $a - b \mid a^n - b^n \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$ com $a \neq b$ e $\forall n \in \mathbb{N}$.

Assim $8 - 1 \mid 8^n - 1^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Ou seja

$$7 \mid 8^n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$ Como, obviamente $7 \mid 7$

temos que $$7 \mid 8^n - 1 + 7 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$ ou seja

$$7 \mid 8^n + 6 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{c.q.d.}$$ //

b) Várias formas de fazer, mas vejamos por indução:

Seja (P) a seguinte propriedade a respeito de $n \in \mathbb{N}$.

$$(P) \quad 3 \mid n^3 - n$$

Note que 1 tem a propriedade (P) pois $3 \mid 1^3 - 1$.

Suponha agora que $k \in \mathbb{N}$ seja tal que

$$3 \mid k^3 - k.$$

Assim, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $k^3 - k = 3q$.

Portanto

$$(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = (k^3 - k) + 3(k^2 + k)$$
$$= 3q + 3(k^2+k) = 3(q + k^2 + k)$$

e portanto $3 \mid (k+1)^3 - (k+1)$. Logo, $3 \mid n^3 - n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, cqd. //

(4) Seja $a \in \mathbb{N}$, $a = r_m 10^m + r_{m-1} 10^{m-1} + \dots + r_3 10^3 + r_2 10^2 + r_1 10 + r_0$. $m \geq 2$.

Logo $a = 10^3 (r_m 10^{m-3} + r_{m-1} 10^{m-4} + \dots + r_3) + r_2 10^2 + r_1 10 + r_0$.

Denote $b = r_2 10^2 + r_1 10 + r_0$. Assim b é o número formado pelos três últimos algarismos de a.

Se $q = r_m 10^{m-3} + r_{m-1} 10^{m-4} + \dots + r_3$, então

$$a = 1000q + b$$

Como $8 \mid 1000q$, temos que $8 \mid a \iff 8 \mid b$, cqd. //

(5)

$$\mathrm{mdc}(n+2, 9n+20) = \mathrm{mdc}(n+2, \overbrace{9(n+2)}^{\text{múltiplo de } n+2} + 2) = \mathrm{mdc}(\overbrace{n+2}^{\text{múltiplo de } 2}, 2)$$
$$= \mathrm{mdc}(n, 2)$$

Assim, como $\mathrm{mdc}(n,2) \mid 2$ temos que $\mathrm{mdc}(n,2) = 1$ ou 2.

Se n for ímpar temos $\mathrm{mdc}(n,2) = 1$

Se n for par, temos $\mathrm{mdc}(n,2) = 2$. //