Resolução da Primeira Avaliação

(2) Temos que mostrar que $((r \to p) \wedge (r \to q)) \longleftrightarrow (r \to (p \wedge q))$ é tautologia. A melhor estratégia é montar a tabela-verdade desta proposição.

(3) Temos que $A \cup B = \mathcal{U}$ e $A \cap B = \emptyset$. Mostremos que $A = \mathcal{U} - B$.

De fato, seja $x \in A$. Como $A \cap B = \emptyset$ então $x \notin B$, isto é, $x \in \mathcal{U} - B$.

Agora seja $y \in \mathcal{U} - B$. Portanto $y \in \mathcal{U}$ e $y \notin B$. Como $\mathcal{U} = A \cup B$, temos então $y \in A \cup B$ e $y \notin B$. Consequentemente $y \in A$.

Provamos, assim, que $A \subset \mathcal{U} - B$ e $\mathcal{U} - B \subset A$. Logo $A = \mathcal{U} - B$.

(4)

a) em $\mathbb{Z}$, a seguinte relação: $x R y \Leftrightarrow x - y \geq 0$.

R não é relação de equivalência pois não é simétrica:

por exemplo, temos que $5 R 2$, pois $5 - 2 = 3 \geq 0$ mas $2 \not R 5$ já que $2 - 5 = -3 < 0$.

b) em $\mathbb{R}$ a seguinte relação: $x S y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.

S é relação de equivalência pois

→ S é reflexiva, já que $\forall x \in \mathbb{R}$ temos $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$ e portanto $x S x$.

→ S é simétrica pois se $x S y$ então $x - y \in \mathbb{Q}$. Logo $y - x \in \mathbb{Q}$ também, donde temos $y S x$.

→ S é transitiva já que se $x S y$ e $y S z$ então $x - y \in \mathbb{Q}$ e $y - z \in \mathbb{Q}$. Logo $(x - y) + (y - z) = x - z \in \mathbb{Q}$, ou seja $x S z$.

⑤ Seja $f: A \to B$ uma função.

Temos a seguinte relação em A: $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

a) $\sim$ é relação de equivalência pois:

1) $\sim$ é reflexiva: $\forall x \in A$ temos que $f(x) = f(x)$ ou seja $x \sim x$.

2) $\sim$ é simétrica: Se $x \sim y$ então $f(x) = f(y)$ e portanto $f(y) = f(x)$, ou seja $y \sim x$.

3) $\sim$ é transitiva: Se $x \sim y$ e $y \sim z$ então $f(x) = f(y)$ e $f(y) = f(z)$. Portanto $f(x) = f(z)$, ou seja, $x \sim z$.

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 < x \leq 2 \\ 2 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

Queremos determinar $\mathbb{R}/\sim$

Note que $\overline{x} = \{y \in \mathbb{R};\ f(x) = f(y)\}$, ou seja $\overline{x}$ representa o conjunto de todos os elementos em $\mathbb{R}$ cujas imagens são iguais à imagem de x.

Só temos três elementos na imagem de f: $\{0, 1, 2\}$.

Note que se $x = 1$ então $f(1) = 0$. Além disso, $\forall y \leq 1$ temos $f(y) = 0 = f(x)$. Logo $\overline{1} = (-\infty, 1]$

Além disso, se $x = 2$ temos $f(2) = 1$ e $\forall y \in (1, 2]$ temos $f(y) = 1$.
Portanto $\overline{2} = (1, 2]$

Se $x = 3$ temos $\overline{3} = (2, +\infty)$ pois $f(3) = 2 = f(y)$ $\forall y > 2$.

Sendo assim,

$$\mathbb{R}/_{\sim} = \{(-\infty, 1], (1, 2], (2, +\infty)\}.$$