EXERCÍCIOS

1. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2) \in V$. Mostre que

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

é um produto interno sobre V.

2. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2) \in V$. Verifique se

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = x_1y_1x_2y_2$$

é um produto interno sobre V.

3. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3) \in V$. Verifique se

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$$

é um produto interno sobre V.

4. Sejam $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ e $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in V$. Mostre que

$$f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = a_{11}b_{11} + 2a_{12}b_{12} + 3a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

é um produto interno sobre V.

5. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2) \in V$. Verifique se

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$$

é um produto interno sobre V.

6. Seja $V = \mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Mostre que

$$\beta = \{(1, 1, 0, -1), (1, 2, 1, 3), (1, 1, -9, 2), (16, -13, 1, 3)\}$$

é uma base ortogonal de V. Calcule $[(a, b, c, d)]_\beta$.

7. Sejam V um espaço euclidiano e $T : V \to V$ um operador linear

   (a) Que condições T deve satisfazer para que a função

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle$$

   seja um produto interno sobre V?

EXERCÍCIOS

1. Seja $V = \mathbb{R}^2$ com o produto interno

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2,$$

onde $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2) \in V$. Calcule o ângulo entre os vetores $\mathbf{u} = (1, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, -1)$.

2. Seja $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ com o produto interno

$$f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = a_{11}b_{11} + 2a_{12}b_{12} + 3a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22},$$

onde $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in V$. Calcule o ângulo entre as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Sejam $V = P_1(\mathbb{R})$ com o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx,$$

onde $f = a_0 + a_1x$, $g = b_0 + b_1x \in V$. Calcule o ângulo entre os polinômios

$$f = 1 + x \text{ e } g = 1 - x.$$

Também, determine $h \in V$ tal que o ângulo entre h e $1 + x$ seja $60°$.

4. Seja $V = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais contínuas munido com o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Calcule o ângulo entre

$$f(x) = x + e^x \text{ e } g(x) = x.$$

5. Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, a *distância* entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é definida por

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Mostre que:

(a) $d(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geq 0$, para todo $\mathbf{u} \in V$ e $d(\mathbf{u},\mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(b) $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = d(\mathbf{v},\mathbf{u})$, para todos $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$.

(c) $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u},\mathbf{w}) + d(\mathbf{v},\mathbf{w})$, para todos $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$.

6. (**Identidade do Paralelogramo**) Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$. Mostre que
$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2\left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\right).$$

7. Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$. Mostre que
$$\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2.$$

8. (**Identidade de Polarização**) Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$. Mostre que
$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2\right).$$

9. (**Identidade de Appolonius**) Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$. Mostre que
$$\|\mathbf{w}-\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|^2 = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 + 2\left\|\mathbf{w} - \frac{1}{2}(\mathbf{u}+\mathbf{v})\right\|^2.$$

10. Seja V um espaço vetorial com dois produtos internos f e g. Mostre que se $\|\mathbf{u}\|_f = \|\mathbf{u}\|_g$, para todo $\mathbf{u} \in V$, então $f = g$.

11. Sejam V um espaço euclidiano e $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. Mostre que se $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ são ortogonais e unitários, então
$$(x\mathbf{u} + y\mathbf{v}) \perp (z\mathbf{u} + t\mathbf{v}) \Leftrightarrow xz + yt = 0.$$

12. Seja V um espaço euclidiano. Mostre que se $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ são ortogonais e unitários, então $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{2}$.

13. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2) \in V$. Seja $\mathbf{A}$ a matriz cujas colunas sejam esses vetores. Mostre que a matriz $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$ é diagonal se, e somente se, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores ortogonais em relação ao produto interno usual.

14. Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$. Mostre que a função $f(x) = \|\mathbf{u} + x\mathbf{v}\|^2$ possui um ponto de mínimo.

15. Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{u} \in V$ um vetor unitário. Sejam
$$S = \{\mathbf{v} \in V : \|\mathbf{v}\| = 1\}$$
e $f : S \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$.