EXERCÍCIOS

2. Seja $V = \mathbb{R}^3$. Verifique quais dos subconjuntos abaixo são subespaços de V.

   (a) $W = \{(x, y, z) \in V : x + y + z = 0\}$.

   (b) $W = \{(x, y, z) \in V : x \leq y \leq z\}$.

   (c) $W = \{(x, y, z) \in V : x - 3z = 0\}$.

   (d) $W = \{(x, y, z) \in V : x \in \mathbb{Z}\}$.

   (e) $\cancel{W = \{(x, y, z) \in V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}}$.

   (f) $W = \{(x, y, z) \in V : x \geq 0\}$.

   (g) $W = \{(x, y, z) \in V : xy = 0\}$.

   (h) $W = \{(x, y, z) \in V : x = z^2\}$.

3. Seja $V = \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 2$. Verifique quais dos subconjuntos abaixo são subespaços de V.

   (a) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : a = c \text{ e } b + d = 0 \right\}$.

   (b) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : a + d \leq b + c \right\}$.

   (c) $\cancel{W = \{\mathbf{A} \in V : \mathbf{AB} = \mathbf{BA},\ \mathbf{B} \text{ uma matriz fixa em } V\}}$.

   (d) $\cancel{W = \{\mathbf{A} \in V : \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\}}$.

   (e) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : ad - bc \neq 0 \right\}$.

   (f) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : ad - bc = 0 \right\}$.

EXERCÍCIOS

1. Mostre que todo vetor em $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $(1,2)$ e $(5,0)$. Que relação existe entre $\mathbb{R}^2$ e $[(1,2),(5,0)]$?

3. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e
$$\mathbf{u}_1 = (1,1,-2), \mathbf{u}_2 = (3,0,4)$$
vetores em V. Quais dos vetores $\mathbf{u} = (4,-5,9)$, $\mathbf{v} = (3,1,-4)$ e $\mathbf{w} = (-1,1,0)$ são combinações lineares dos vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$?

4. Sejam $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ e
$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$
vetores em V. Quais dos vetores
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 9 & -7 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$
são combinações lineares dos vetores $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{A}_3$?

5. Encontre os geradores para os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

   (a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$.

   (b) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = x - 2y = 0\}$.

   (c) $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0\}$.

6. Sejam $V = \mathbb{R}^4$ e

$$W = \{(x, y, z, t) \in V : x + 2y - 2z = 0 \text{ e } t = 0\}$$

um subespaço de V. Quais dos vetores $\mathbf{u} = (-2, 4, 3, 0)$, $\mathbf{v} = (6, 2, 4, 1)$ e $\mathbf{w} = (-2, 1, 0, 0)$ estão em W?

EXERCÍCIOS

1. Seja $V = \mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ e $\mathbf{v} = (y_1, \ldots, y_n) \in V$. Mostre que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são LD se, e somente se, existe um escalar $a \in \mathbb{R}$ tal que $y_i = ax_i$, $i = 1, \ldots, n$.

2. Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vetores de um espaço V. Se $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é um conjunto LI, mostre que:

   (a) $\{\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w}, \mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{w}\}$ é um conjunto LI.

   (b) $\{\mathbf{u} + \mathbf{v} - 3\mathbf{w}, \mathbf{u} + 3\mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}\}$ é um conjunto LD.

5. Encontre um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ tal que $[\mathbf{u}] = W_1 \cap W_2$, onde

$$W_1 = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)] \text{ e } W_2 = [(1, 2, 3), (1, -1, 1)].$$

6. Em quais condições sobre o escalar k, o conjunto

$$\left\{(1, 0, k), (1, 1, k), \left(1, 1, k^2\right)\right\}$$

é LI em $\mathbb{R}^3$?

8. Responda verdadeiro (V) ou falso (F). Justifique.

( ) Todo conjunto que contém um subconjunto LD é LD?

( ) Todo subconjunto de um conjunto LI é LI?

( ) Todo conjunto que contém dois vetores iguais é LI?

( ) Todo conjunto que contém o vetor nulo é LI?

4. Seja $V = \mathbb{R}^4$. Determine uma base e a dimensão dos subespaços

$$\begin{aligned} W_1 &= [(1,4,-1,3), (2,1,-3,-1), (0,2,1,-5)] \text{ e} \\ W_2 &= [(1,-4,-2,1), (1,-3,-1,2), (3,-8,-2,7)]. \end{aligned}$$

5. Sejam $V = \mathbb{R}^3$,

$$W_1 = \{(x,y,z) \in V : x = 0\} \text{ e } W_2 = [(1,2,0), (3,1,2)]$$

subespaços de V. Determine uma base e a dimensão para W_1, W_2,

6. Sejam $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : b = -a \right\} \text{ e } W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : c = -a \right\}.$$

subespaços de V. Determine uma base e a dimensão para W_1, W_2,

8. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e o conjunto de vetores $\beta = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ em V, onde

$$\mathbf{u} = (1-a, 1+a) \text{ e } \mathbf{v} = (1+a, 1-a).$$

Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$ para que β não seja uma base de V.

11. Seja $V = \mathbb{R}^4$. Quais dos subconjuntos abaixo são bases de V?

(a) $\{(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1), (1,0,0,1)\}$.

(b) $\{(1,3,-2,4), (1,1,5,9), (2,0,-13,23), (1,5,1,-2)\}$.

(c) $\{(1,1,1,1), (3,2,0,3), (0,-1,0,3), (4,2,1,7)\}$.

12. Em cada um dos subconjuntos abaixo determine uma base de W

(a) Se $V = \mathbb{R}^3$ e

$$W = \{(x, y, z) : x - 3y + 3z = x + 5y - z = x + y + z = 0\}.$$

(b) Se $V = \mathbb{R}^4$ e

$$W = [(1, -2, 0, 1), (0, 0, 2, 5), (-2, 4, 2, 3)].$$

(c) Se $V = \mathbb{R}^4$ e

$$W = [(1, 1, 1, 1), (3, 2, 0, 3), (0, -1, 0, 3)].$$